INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND DRITTES HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11.50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Reckling, K. A., Die Stabilität erzwungener harmonischer Schwingungen gerader I-Träger im Verband eines Tragwerkes. Mit 8 Textabbildungen 137

Weissinger, J., Über die Einschaltung zusätzlicher Punkte beim Verfahren von Multhopp 163

Weissinger, J., Die Auftriebsverteilung von Tragflügeln mit Tiefensprung. Mit 2 Textabbildungen 166

Grammel, G., Zur Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung. Mit 3 Textabbildungen 170

Hain, K., Zur Synthese der Schiebepaar-Getriebe. Mit 9 Textabbildungen..... 184

Pöschl, Th., Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten. Mit 7 Textabbildungen 189

Rotta, J., Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten. Mit 6 Textabbildungen 195

Berger, E. R., Zur Berechnung des Einflußfeldes der quadratischen Platte. Mit 1 Textabbildung 207

Pucher, A., Zuschrift zu der Arbeit von E. R. Berger 210

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND DRITTES HEFT 1952

Die Stabilität erzwungener harmonischer Schwingungen gerader I-Träger im Verband eines Tragwerkes*.

Von K. A. Reckling.

1. Einleitung. Die bisher über Stabilitätsprobleme auf dem Gebiete der Elastokinetik veröffentlichten Arbeiten gehen in ihrer mathematischen Behandlung auf zwei verschiedenen Wegen vor:

1. In der von *E. Mettler* entwickelten „Allgemeinen Theorie der Stabilität der elastischen Bewegung“[1] sowie in einer Reihe von Einzelarbeiten[2] wird für die „Nachbarverschiebungen“, welche für die Stabilitätsbeurteilung maßgebend sind, ein *Ritz*-Ansatz mit zeitabhängigen Koeffizienten eingeführt, der die jeweiligen Randbedingungen erfüllen muß. Man gelangt dadurch zu einem System von unendlich vielen gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, das in einigen konkreten Einzelfällen in mehrere getrennte Systeme oder auch Einzelgleichungen (*Mathieu*-Gleichungen) zerfällt. Die Integrale dieses Systems werden in trigonometrische Reihen und alle vorkommenden Koeffizienten mit der Methode der „Störungsrechnung“ nach Potenzen eines kleinen Parameters entwickelt, der die Amplitude der erregenden Kraft angibt. Auf diesem Wege ergeben sich zusammengehörige Werte von Erregerfrequenzen und Belastungsamplituden, welche bei beliebigen Anfangsbedingungen zu unbegrenzt anwachsenden Nachbarbewegungen führen können.

2. Dagegen geht *W. Kucharski*[3] in einer Arbeit über die durch pulsierenden Schub belastete Rechteckplatte ganz anders vor, indem er die Methode der „Störungsrechnung“ auf eine partielle Differentialgleichung überträgt und bereits die Nachbarverschiebungen selbst nach wachsenden Potenzen eines kleinen Parameters entwickelt, wobei die Entwicklungs-Koeffizienten Funktionen der Zeit sind.

Die vorliegende Arbeit will die durch pulsierende Belastungen mit vorgegebener Erregerfrequenz ω erzwungenen stationären Schwingungen eines I-Trägers im Verband eines Tragwerkes hinsichtlich ihrer Stabilität untersuchen. Dadurch, daß Nachbarbauteile an den Enden des Trägers angeschlossen sind, muß man dort außerdem noch elastische, zeitabhängige Einspannbedingungen berücksichtigen. Dieses Problem wurde bisher nur von *S. Woinowsky-Krieger*[2] für den speziellen Fall der Belastung eines an den Enden frei aufliegenden Trägers durch gleichgroße Endmomente nach der erstgenanrten Methode gelöst. Es soll im folgenden in größerer Allgemeinheit mit dem zweiten Verfahren untersucht werden, zu dessen Ausdehnung auf das hier vorliegende System zweier partieller Differentialgleichungen sich der Verfasser besonders deshalb entschloß, weil einige Vorversuche auf dem ersten Wege sehr umfangreiche — vor allem durch die Einspannung an den Trägerenden bedingte — Rechnungen in Aussicht stellten.

Die Gestalt der für den allgemeinen Belastungsfall zu integrierenden Differentialgleichungen der Nachbarverschiebungen legte es nahe, diesen näherungsweise auf den einfacheren Fall der Belastung durch gleich große pulsierende Endmomente zurückzuführen; für diesen wird dann die eigentliche Stabilitätsrechnung durchgeführt. Durch die Entwicklung der Nachbarverschiebungen nach einem kleinen Parameter ε, der die Belastungsamplitude mißt, erhält man unendlich viele, sukzessiv aufzulösende partielle Differentialgleichungen. Diese lassen eine andere mathematische Behandlung zu als die entsprechenden Gleichungen der Arbeit von *W. Kucharski*[3],

---

* Gekürzte Fassung einer von der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg genehmigten Dissertation. Der Verfasser ist den beiden Berichtern, Herrn Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó* und Herrn Prof. *W. Kucharski* für wertvolle Ratschläge sehr zu Dank verpflichtet.

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 135; sowie 17 (1949), S. 418.

[2] *E. Mettler*, Mitt. Forsch.-Anst. G.H.H.-Konzern 8 (1940), S. 1; *E. Mettler*, Forschungsh. a. d. Gebiete d. Stahlbaus, Heft 4; *S. Woinowsky-Krieger*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 197; *K. Kewjal*, Dissertation Hannover 1949; *F. Weidenhammer*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 162.

[3] *W. Kucharski*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 385.

wodurch gewisse dort auftretende Schwierigkeiten umgangen werden können und man auf eine Reihe von Randwertaufgaben für gewöhnliche inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten geführt wird; nach deren Lösung kann man „Instabilitätsgebiete" in einer (ε, ω)-Ebene angeben. Die kritischen Erregerfrequenzen, bei denen Instabilität auftritt, können aber auch ohne Lösung dieser Randwertaufgaben in einfacher Weise allgemein angegeben werden.

An Hand von zwei Beispielen mit angefügter Zahlenrechnung für konkrete Einzelfälle wird die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens dargestellt. Am Beispiel eines axial pulsierend belasteten Stabes wird schließlich gezeigt, daß der hier eingeschlagene Weg auch in den bisher mit der erstgenannten Methode untersuchten Einzelfällen schnell zu denselben Ergebnissen führt wie dort.

2. Spezielle Voraussetzungen und Näheres zur Aufgabenstellung. Wir betrachten in Abb. 1 einen geraden, zur y- und z-Achse symmetrischen I-Träger von konstanter Biegesteifigkeit, der aus einem durch harmonisch schwingende Kräfte einer bestimmten vorgegebenen Frequenz ω beanspruchten Tragwerk herausgeschnitten sein möge. Wir setzen voraus, daß die Eigenschwingungen des Tragwerkes abgeklungen sind, so daß nur der stationäre Anteil der erzwungenen Schwingungen maßgebend ist. Der Träger möge außerdem noch durch eine in der Steg-Ebene wirkende gleichmäßige, zeitlich veränderliche Belastung $p(t)$ von der gleichen Frequenz ω beansprucht werden. Die in der (x,y)-Ebene wirkenden Schnittkräfte an den Stabenden sind dann harmonisch mit der Frequenz ω veränderliche Kräfte. Alle diese Schwingungen sollen die gleiche Phase haben. Dann wirken in der (x,y)-Ebene die folgenden vorgegebenen eingeprägten Kräfte bzw. Momente:

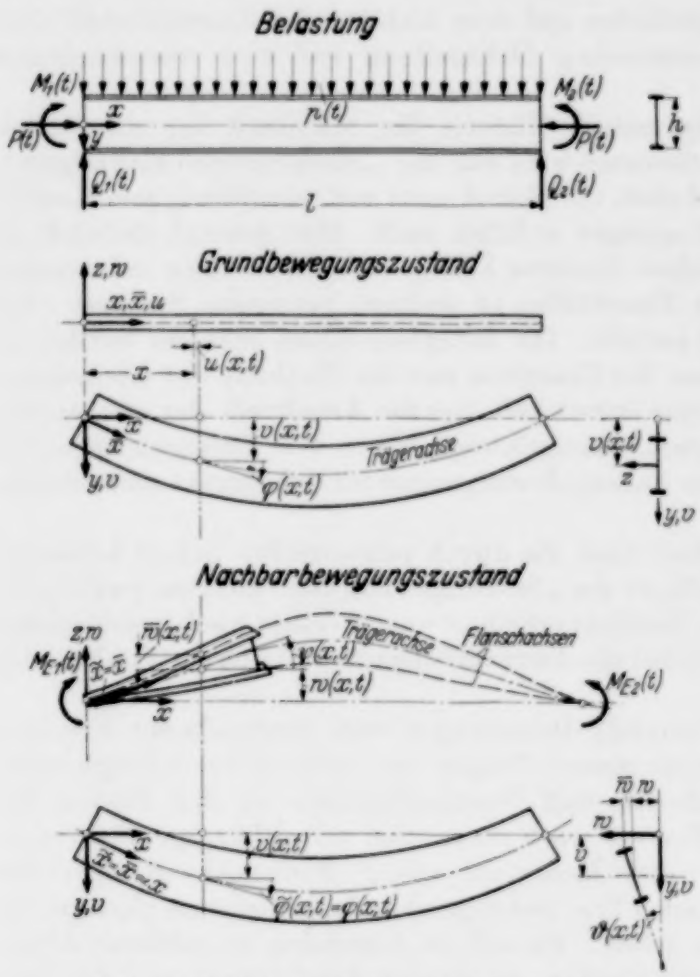

Abb. 1. Belastung des Trägers mit den zugehörigen Verschiebungen.

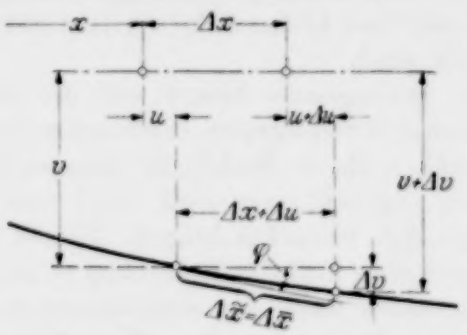

Abb. 2. Längenelement der Stabachse im Grundbewegungszustand.

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= P_0 + P_1 \cos \omega t, \qquad p(t) = p_0 + p_1 \cos \omega t, \\ Q_i(t) &= Q_{i0} + Q_{i1} \cos \omega t, \qquad M_i(t) = M_{i0} + M_{i1} \cos \omega t \quad (i = 1, 2), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo der Zeiger 0 die statische Vorbelastung bezeichnet.

Der durch diese Belastungen erzwungene stationäre „Grundbewegungszustand" in der (x,y)-Ebene setzt sich zusammen aus Längsschwingungen $u(x,t)$ in Richtung der x-Achse und aus Biegeschwingungen $v(x,t)$ in der (x,y)-Ebene. Diesem Grundbewegungszustand wird sodann ein durch eine beliebige kleine Störung verursachter „Nachbarbewegungszustand" überlagert, der durch die Auslenkung $w(x,t)$ in der (x,z)-Ebene und den Torsionswinkel $\vartheta(x,t)$ gekennzeichnet wird. Da diese beiden letzten Verschiebungen miteinander gekoppelt sind, wird der Nachbarbewegungszustand als „Kippschwingung" bezeichnet. Der räumliche Nachbarzustand soll sich vom ebenen Grundzustand nur um kleine Größen erster Ordnung unterscheiden.

Da an den Trägerenden Nachbarbauteile angeschlossen sind, wirken dort noch zeitlich veränderliche Einspannmomente $M_{Ei}(t)$, deren Vektoren parallel zur y-Achse weisen. Der Träger sei dort außerdem so gelagert, daß die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes (d.h. der Träger-

steg) stets in der (x,y)-Ebene bleibt. Sämtliche eingeprägten Kräfte und Momentenvektoren sollen ihre Richtung bei der Verformung stets beibehalten.

Der Einfluß der Rotationsträgheit um die Achse des kleinsten und größten Trägheitsmomentes wird von vornherein vernachlässigt. Lassen wir schließlich auch die Dämpfung außer acht, so bleiben wir bei der Beurteilung der dynamischen Stabilität bestimmt auf der sicheren Seite[1].

3. Die grundlegenden Bewegungsdifferentialgleichungen und ihre Randbedingungen; Einführung von Näherungen. Im Grundbewegungszustand wollen wir einem Stabquerschnitt die längs der ausgebogenen Stabachse gerechnete Koordinate $\bar{x}$ und die dazu senkrechten, mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallenden Koordinaten $\bar{y}$, $\bar{z}$ zuordnen; der ausgekippte Nachbarzustand werde durch die entsprechenden körperfesten Koordinaten $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ gekennzeichnet (Abb. 1). Da beim Übergang zum ausgekippten Bewegungszustand keine zusätzlichen Längskräfte auftreten, ändert sich die Länge der Stabachse nicht, und es ist $\Delta\tilde{x} = \Delta\bar{x}$. Ferner soll näherungsweise $\Delta\tilde{x} = \Delta x$ gesetzt werden; denn nach Abb. 2 ist das Längenelement der ausgebogenen Stabachse im Grundzustand

$$\Delta x = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \cdot \Delta x,$$

wenn wir bei einer Entwicklung von Δu und Δv in eine *Taylor*-Reihe nur das jeweils erste Glied mitnehmen. Nun hat das Glied $\partial u/\partial x = \varepsilon_x = \sigma_x/E$ für Stahl mit $E \approx 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$ die Größenordnung 10^{-3}. Wenn wir die größte Trägerdurchsenkung $v_{max} = f$, wie es in der Praxis üblich ist, durch die Forderung $f < l/500$ begrenzen und eine Durchbiegungskurve von der Form $v = f \sin(\pi x/l)$ annehmen, so wird andererseits $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 < \frac{\pi^2}{25} \cdot 10^{-4}$, so daß wir $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ gegenüber „Eins" vernachlässigen können.

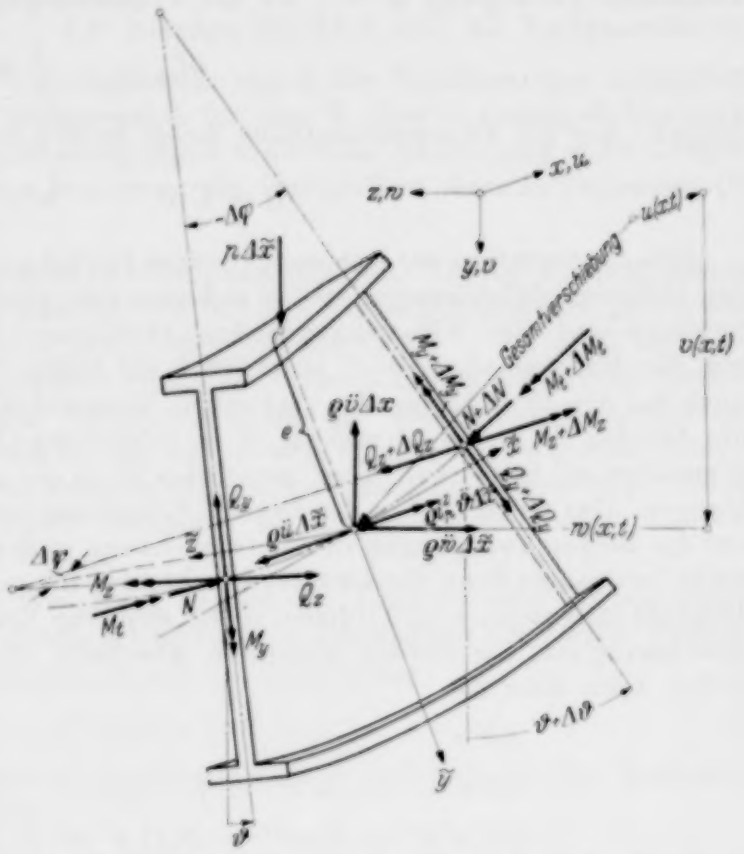

Abb. 3. Kräfte und Momente am ausgekippten Trägerelement.

Die im Grundzustand an der Stelle $\bar{x}$ wirkenden Kräfte und Momente sind von endlicher Größe und rufen endlich große Verschiebungen in der (x,y)-Ebene hervor. Die beim Übergang in die ausgekippte Nachbarlage hinzutretenden Kräfte und Momente Q_z, M_y, M_t sowie die durch sie bewirkten Verschiebungen w und ϑ und deren Ableitungen sind dagegen nach Voraussetzung von erster Ordnung klein.

Wenn alle am ausgekippten Trägerelement von der Länge $\Delta\tilde{x}$ wirkenden Schnittkräfte und -momente einschließlich der negativen Massenbeschleunigungen ins Gleichgewicht gesetzt werden (Abb. 3), so ergeben sich nach Fortlassen von kleinen Größen zweiter Ordnung und nach Division durch Δx beim Übergang zur Grenze $\Delta x \to 0$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&N' + M_z'\varphi' = -\varrho\ddot{u},\\
&-N\varphi' + M_z'' + p = \varrho\ddot{v},\\
&-N\psi' - M_y'' - 2M_z'\vartheta' - M_z\vartheta'' - (M_t\varphi')' + p\vartheta = \varrho\ddot{w},\\
&M_y\varphi' + M_z\psi' - M_t' - pe\vartheta = -\varrho i_p^2\ddot{\vartheta},
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

worin die Ableitungen nach x mit Strichen und die nach t mit Punkten bezeichnet sind und die Konstanten ϱ die schwingende Masse des Trägers je Längeneinheit, i_p den Trägheitshalbmesser des Trägerquerschnitts, e die Entfernung des Lastangriffs von p von der Stabachse bedeuten.

[1] Über den stabilitätsverbessernden Einfluß der Dämpfung vgl. die in der Fußnote 2 von S. 137 angeführten Arbeiten von *Mettler* und *Weidenhammer*.

Es gelten nun folgende Elastizitätsgesetze für die Schnittgrößen: Für die Längskräfte hat man

$$N = -EFu'. \tag{3}$$

Den Krümmungen

$$\varphi' \approx v'' \quad \text{bzw.} \quad \psi' \approx w'' + v''\vartheta \tag{4}$$

der neutralen (x,z)- bzw. (x,y)-Ebene im ausgekippten Zustand[1] sind die entsprechenden Biegemomente M_z bzw. M_y proportional:

$$M_z \approx -B_z v'', \qquad M_y \approx B_y(w'' + v''\vartheta) \tag{5}$$

mit $B_z = EI_z$ als Biegesteifigkeit bezogen auf die z-Achse, $B_y = EI_y$ als Biegesteifigkeit bezogen auf die y-Achse. Zu dem *de Saint-Venant*schen Anteil $M_{t1} = C(\vartheta' - v''w')$ am Torsionsmoment M_t (mit $C = GI_d$ = Torsionssteifigkeit des Querschnitts)[1] kommt infolge einer zusätzlichen Ausbiegung $\bar{w} = \frac{1}{2} h\vartheta$ der Flanschachsen ein zusätzliches Torsionsmoment

$$M_{t2} = -\frac{1}{4} h^2 B_y \vartheta'''$$

hinzu[2]. Aus der Zusammensetzung dieser beiden Anteile folgt

$$M_t = C(\vartheta' - v''w') - \frac{h^2}{4} B_y \vartheta'''. \tag{6}$$

Einer Integration der sich aus (2) unter Berücksichtigung von (3) bis (6) ergebenden gekoppelten Differentialgleichungen stellen sich nun sehr große Schwierigkeiten entgegen, so daß wir gezwungen sind, eine Näherungsannahme zuzulassen: Nach der oben erfolgten Abschätzung wollen wir die Krümmung $\varphi' \approx v'' < \pi^2/500\,l$ als kleine Größe erster Ordnung annehmen, wie das auch bei der Berechnung der statischen Kippstabilität allgemein üblich ist[2]. Dann können wir die Glieder $M_z'\varphi'$, $M_t\varphi'$ und $M_y\varphi'$ in Gleichung (2) fortlassen und außerdem die Glieder $v''\vartheta$ gegenüber w'' in (4) und $v''w'$ gegenüber ϑ' in (6) als kleine Größen zweiter Ordnung vernachlässigen. Das Glied $N\varphi'$ in der zweiten Gleichung von (2), durch das der Einfluß der Längskräfte auf die Biegeschwingungen in der (x,y)-Ebene in die Rechnung eingeht, wollen wir vorerst noch nicht fortlassen; denn die Längskräfte können für gewisse Erregerfrequenzen zur Instabilität der Biegeschwingungen $v(x,t)$ führen, selbst wenn ihr Einfluß auf diese wegen der kleinen Krümmung sehr gering ist; wir werden darauf in Abschnitt 4b noch zurückkommen. Die Gleichungen (2) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned}
EFu'' &= \varrho\ddot{u}, && \text{(a)}\\
EFu'v'' - B_z v^{IV} + p &= \varrho\ddot{v}, && \text{(b)}\\
EFu'w'' - B_y w^{IV} + B_z(2v'''\vartheta' + v''\vartheta'') + p\vartheta &= \varrho\ddot{w}, && \text{(c)}\\
B_z v''w'' - \frac{h^2}{4} B_y \vartheta^{IV} + C\vartheta'' + pe\vartheta &= \varrho i_p^2 \ddot{\vartheta}. && \text{(d)}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die beiden ersten gekoppelten Differentialgleichungen beschreiben die Grundbewegung [Längsschwingungen $u(x,t)$ bzw. Biegeschwingungen $v(x,t)$ in der (x,y)-Ebene]. Die durch $w(x,t)$ und $\vartheta(x,t)$ beschriebene Nachbarbewegung ist durch Einsetzen der Integrale $u(x,t)$, $v(x,t)$ der beiden ersten Differentialgleichungen in die beiden letzten zu ermitteln.

Zu den Gleichungen (7) treten noch Einspannbedingungen in der (x,z)-Ebene für die Trägerenden hinzu, wo Nachbarträger angeschlossen sein mögen, die mit zeitlich veränderlichen Einspannmomenten $M_{E1}(t) = B_y w''(0,t)$ und $M_{E2}(t) = B_y w''(l,t)$ auf die Trägerenden zurückwirken (vgl. Abb. 1b). Diese Einspannmomente wachsen bei elastischer Einspannung proportional zur Neigung der Biegelinie an den Enden:

$$M_{E1}(t) = c_1\psi(0,t) = c_1 w'(0,t), \qquad M_{E2}(t) = -c_2\psi(l,t) = -c_2 w'(l,t),$$

wobei c_1, c_2 die Federkonstanten der elastischen Einspannung sind. Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die Einspannmomente erhalten wir

$$c_1 w'(0,t) - B_y w''(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad c_2 w'(l,t) + B_y w''(l,t) = 0.$$

Dazu tritt noch die Forderung, daß die Durchsenkungen w an den Trägerenden verschwinden

[1] Vgl. z. B. *Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastomechanik, S. 155.
[2] Vgl. z. B. *E. Chwalla*, Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaus, Heft 2.

sollen, so daß wir als Randbedingungen

$$w(0,t) = w(l,t) = w'(0,t) - C_1 w''(0,t) = w'(l,t) + C_2 w''(l,t) = 0 \quad \text{mit} \quad C_1 = \frac{B_y}{c_1 l} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{B_y}{c_2 l} \tag{8}$$

erhalten. [Für freie Auflagerung an den Enden ist beispielsweise $c_1 = c_2 = 0$ und damit $w''(0) = w''(l)$; bei vollkommener Einspannung müssen wegen $1/c_1 = 1/c_2 = 0$ die Randbedingungen $w'(0) = w'(l) = 0$ erfüllt werden.]

Bei der Aufstellung der Randbedingungen für den Torsionswinkel ϑ beachten wir, daß sich die Ausbiegung der Flanschachsen um den Betrag $\pm \bar{w}(x,t) = \pm \frac{1}{2} h \vartheta(x,t)$ von der Ausbiegung w der Trägerachse unterscheidet (vgl. Abb. 1), und daß dann die Tangentenneigung der Flanschachsen an den Trägerenden $(w \pm \bar{w})' = w' \pm \frac{1}{2} h \vartheta'$ beträgt, wodurch sich die Endquerschnittflächen des Trägers verwölben. Die elastische Einspannung durch die Nachbarträger verhindert diese Verwölbungen teilweise. Es erscheint naheliegend, für den Verlauf der zusätzlichen Ausbiegungen $\bar{w}$ der Flanschachsen dieselben Randbedingungen wie für die Ausbiegung w der Trägerachsen anzunehmen. Dann gelten aber wegen $h = \text{const}$ für ϑ dieselben Randbedingungen (8) wie für w.

4. Der Grundbewegungszustand. a) Longitudinalschwingungen. Da nur die stationären Schwingungen des Tragwerkes interessieren, könnten wir für $u(x,t)$ eine harmonische Bewegung mit der vorgegebenen Frequenz ω ansetzen $u(x,t) = u_0(x) + u_1(x) \cos \omega t$, wo $u_0(x)$ die Verschiebung infolge der zeitlich unveränderlichen Lastanteile ist. Durch Einführen in (7a) würden wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die beiden Koordinaten-Funktionen $u_0(x)$ und $u_1(x)$ erhalten, zu denen infolge der an den Stabenden wirkenden Längskräfte je zwei Randbedingungen mit zum Teil zeitabhängigen Koeffizienten hinzutreten. Die so gewonnene Lösung würde jedoch für die weitere Rechnung zu unhandlich werden, so daß wir $u(x,t)$ auf einem anderen Wege bestimmen wollen:

Wir gehen dazu vom Elastizitätsgesetz Gleichung (3) für die Längsverschiebungen $u(x,t)$ aus und beachten, daß die in einem Querschnitt x übertragene Längskraft die Größe $P(t)$ zusätzlich einer von der Trägheitswirkung herrührenden Kraft $\bar{N}(x,t)$ hat:

$$EF u' = -[P_0 + P_1 \cos \omega t + \bar{N}(x,t)]. \tag{9}$$

Wir wollen nun $u(x,t)$ nach den Eigenschwingungsformen $\cos k\pi x/l$ des um die Stabmitte symmetrisch schwingenden Stabes entwickeln:

$$u(x,t) = \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} u_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Die an der Stelle x infolge der Trägheitswirkung des gesamten Stabes wirkende Kraft wird

$$\bar{N}(x,t) = -\varrho \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \left[\frac{d^2 u_k}{dt^2} \int_0^x \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \right] = -\frac{\varrho l}{\pi} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{d^2 u_k}{dt^2} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Nun entwickeln wir auch die am Ende angreifende Längskraft in eine nach $\sin k\pi x/l$ fortschreitende *Fourier*-Reihe

$$P_0 + P_1 \cos \omega t = \frac{4}{\pi} (P_0 + P_1 \cos \omega t) \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

und erhalten mit diesen Entwicklungen aus (9) die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \omega_{lk}^2 u_k = \frac{4}{l\varrho} (P_0 + P_1 \cos \omega t) \qquad (k = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$$

mit

$$\omega_{lk} = \sqrt{\frac{EF}{\varrho}} \frac{k\pi}{l} = k\text{-ter Eigenfrequenz der Longitudinalschwingungen.}$$

Die Lösungen der homogenen Gleichungen sind nicht von Interesse, da die freien Schwingungen nach Voraussetzung abgeklungen sein sollen. Aus den partikulären Lösungen der inhomogenen

Gleichungen erhalten wir

$$u(x,t) = \frac{4}{l\varrho} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \left| \frac{\cos \dfrac{k\pi x}{l}}{\omega_{lk}^2} \left[P_0 + \frac{P_1 \cos \omega t}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_{lk}}\right)^2} \right] \right|$$

als Gesamtlösung in einer Form, die es gestattet, eine wesentliche Vereinfachung vorzunehmen: Wir wollen die Untersuchung nämlich nur für solche Erregerfrequenzen ω durchführen, für die $\omega \ll \omega_{l1}$ und damit erst recht $\omega \ll \omega_{lk}$ ist. Folgende Abschätzung zeigt die Berechtigung dieses Näherungsschrittes: Aus späteren Rechnungen ergibt sich, daß die kritischen Erregerfrequenzen ω höchstens die Größe der doppelten Biegeeigenfrequenz $2\,\omega_{zn}$ in der (x,z)-Ebene oder die der doppelten Eigenfrequenz der Torsionsschwingungen $2\,\omega_{tn}$ haben. Für den in der (x,z)-Ebene an den Stabenden frei aufliegenden Träger sind diese Frequenzen nach Späterem [vgl. Gl. (32)]

$$2\,\omega_{zn} = 2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad 2\,\omega_{tn} = 2\,\frac{n\pi}{l i_p} \sqrt{\frac{GI_d}{\varrho}\left(1 + \frac{n^2\pi^2 h^2 EI_y}{4\,GI_d l^2}\right)}.$$

Nehmen die Erregerfrequenzen ω diese Werte an, dann werden die $(\omega/\omega_{l1})^2$ mit $G \approx 0{,}4\,E$ und $I_d \approx F^3/40\,i_p^2$ näherungsweise[1] höchstens gleich

$$n^4\left(\frac{2\pi i_p}{l}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 4 \cdot 10^{-2} n^2 \frac{F^2}{i_p^4}\left[1 + \left(\frac{2\,n\pi h\, i_p i_y}{Fl}\right)^2\right]$$

und können für kleine n und Träger mit normalem l/h gegenüber „eins" vernachlässigt werden. Das gilt erst recht für die Quotienten $(\omega/\omega_{lk})^2$, so daß wir als Näherungslösung der Gleichung (7a)

$$u(x,t) = \frac{4\,l}{\pi^2 EF}\,(P_0 + P_1 \cos \omega t) \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{l}$$

erhalten und daher

$$EF\,u' = -\,(P_0 + P_1 \cos \omega t) = -\,P(t) \tag{10}$$

in (7b) und (7c) einführen können. Wir hätten diese Näherung auch aus (7a) direkt gewinnen können, wenn wir dort $\ddot{u} = 0$ gesetzt hätten; das würde bedeuten, daß $EF\,u'$ von x unabhängig ist und nach dem Elastizitätsgesetz (3) für $x = 0$, also auch für alle x den Wert $-P(t)$ annimmt, wie es auch die Gleichung (10) aussagt.

b) Transversalschwingungen in der Lastebene. Gleichung (7b) lautet mit (10)

$$B_z v^{\mathrm{IV}} + P(t)\,v'' - p(t) = -\varrho\,\ddot{v}. \tag{11}$$

Bevor wir diese Gleichung in ähnlicher Weise wie unter a) integrieren, verdient zunächst noch ein wichtiger Sonderfall kurz erwähnt zu werden: Falls $p(t) = 0$ ist und die Momente an den Trägerenden verschwinden, haben wir die Differentialgleichung der Biegeschwingungen des durch die pulsierende Axiallast $P(t)$ beanspruchten Stabes; dann beschreibt Gleichung (7a) die Grundbewegung u, und (11) ist die Differentialgleichung der Nachbarbewegung, die bereits für verschiedene Einspannbedingungen an den Enden auf ihre Stabilität untersucht wurde[2]. In diesem Fall ist übrigens wegen $B_y \ll B_z$ viel eher eine instabile Nachbarbewegung $w(x,t)$ in der (x,z)-Ebene zu erwarten. Wir erhalten auch tatsächlich mit $v(x,t) = 0$ aus (7c) unter Beachtung von (10) eine Differentialgleichung für $w(x,t)$, die derjenigen für die Nachbarbewegung in der (x,y)-Ebene genau entspricht:

$$B_y w^{\mathrm{IV}} + P(t) w'' = -\varrho\,\ddot{w}. \tag{12}$$

Wir werden auf diese Differentialgleichung später noch zurückkommen.

Zur Integration von (11) gehen wir vom Elastizitätsgesetz (5) für das Moment $M_z(x,t)$ aus, das sich nach Abb. 4 aus folgenden Anteilen zusammensetzt: Aus einem Moment $M_p(x,t)$ infolge der Belastung p und der durch p hervorgerufenen Querkraft $Q_p(t)$ an den Enden, und aus zwei durch die pulsierenden Endmomente $M_1(t)$ und $M_2(t)$ hervorgerufenen Anteilen, wobei im Falle $M_1(t) + M_2(t)$ noch eine Querkraft $[M_2(t) - M_1(t)]\,1/l$ an den Enden hinzukommt; ferner aus einem von der Längskraft herrührenden Anteil $P(t) \cdot v$ und schließlich aus dem durch die Träg-

[1] Diese Näherungsformel für I_d nach *Föppl*, Drang und Zwang II, S. 101, reicht für die Abschätzung aus.

[2] Vgl. Fußnote 2 von S. 137.

heitswirkung hervorgerufenen Momentenanteil $\bar{M}(x,t)$. Es gilt also

$$-B_z v'' = M_z(x,t) = M_p(x,t) + M_1(t) + [M_2(t) - M_1(t)]\frac{x}{l} + P(t)\,v(x,t) + \bar{M}(x,t). \qquad (13)$$

Wir entwickeln nun die Ausbiegung $v(x,t)$ in eine nach den Eigenschwingungsformen $\sin k\pi x/l$ des an den Enden gestützten Trägers fortschreitende *Fourier*-Reihe:

$$v(x,t) = \sum_{k=1,2\ldots}^{\infty} v_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Zur Ermittlung der unbekannten Koeffizienten $v_k(t)$ entwickeln wir alle auf der rechten Seite von (13) stehenden Momente ebenfalls in *Fourier*-Reihen:

$$M_p(x,t) = \frac{1}{2}(lx - x^2)\,p(t) = \frac{4\,l^2 p(t)}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$M_1(t) = \frac{4}{\pi} M_1(t) \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$[M_2(t) - M_1(t)]\frac{x}{l} = -\frac{2}{\pi}[M_2(t) - M_1(t)] \sum_{k=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Zur Entwicklung des Momentes $\bar{M}(x,t)$ beachten wir, daß wir die Trägheitskraft

$$-\varrho\,\ddot{v}(x,t) = -\varrho \sum_{k=1,2\ldots}^{\infty} \ddot{v}_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

als eine Summe aus kontinuierlich verteilten Einzelbelastungen $q_k(x,t) = -\varrho \sin(k\pi x/l)\,\ddot{v}_k(t)$ darstellen können. Das gesamte von der Trägheitswirkung herrührende Moment wird dann

$$\bar{M}(x,t) = -\sum_{k=1,2,\ldots}^{\infty} \left[\int_0^x \left\{\int_0^x q_k(x,t)\,dx\right\} dx\right] = -\varrho\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1,2\ldots}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,\ddot{v}_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Wenn wir alle diese Entwicklungen in (13) einführen, ergeben sich k gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die $v_k(t)$

$$\frac{d^2 v_k}{dt^2} + \left[\omega_{k\,y}^2 - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3 P_1 \cos\omega t\right] v_k = \begin{cases} \frac{1}{\varrho}\left(\frac{k\pi}{l}\right)(L_{0k} + L_{1k}\cos\omega t) & (k = 1, 3, 5, \ldots), \\ -\frac{2\,k\pi}{\varrho l^2}(-1)^k[M_2(t) - M_1(t)] & (k = 2, 4, 6, \ldots), \end{cases} \qquad (14)$$

wobei zur Abkürzung

$$L_{ik} = \frac{4\,l^2}{(k\pi)^3} p_i + \frac{4}{k\pi} M_{1i} - \frac{2}{\pi}(M_{2i} - M_{1i})\frac{(-1)^k}{k} \qquad (i = 0, 1)$$

eingeführt wurde und durch $\omega_{k\,y} = k\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{B_z}{\varrho}(k^2 - \varepsilon_P)}$ die k-te Eigenfrequenz der Biegeschwingung des durch die konstante Längskraft $P_0 = \varepsilon_P P_{E1} = \varepsilon_P B_z (\pi/l)^2$ belasteten Trägers in der (x,y)-Ebene angegeben wird; ε_P ist dabei das Verhältnis der Last P_0 zur ersten kritischen Knicklast P_{E1}.

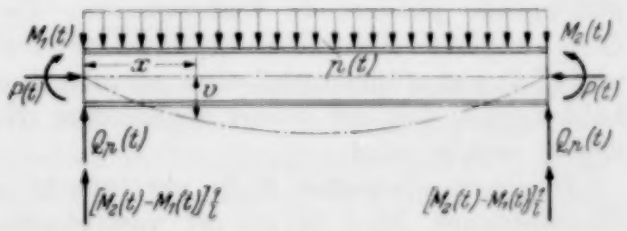

Abb. 4. Belastung des Trägers.

Wir haben damit k inhomogene *Mathieu*sche Differentialgleichungen zur Bestimmung der Grundbewegung $v(x,t)$ in der (x,y)-Ebene. Mit der Integration dieser Gleichungen wollen wir uns hier nicht beschäftigen, weil schon *Mettler*[1] eine ähnliche Differentialgleichung integrierte. Es ergab sich dabei folgendes: Die homogenen Gleichungen (14) beschrieben die Biegeschwingungen des durch pulsierende Axiallast beanspruchten, an den Enden freien Trägers und können für die kritischen Erregerfrequenzen $\omega = 2\,\omega_{k\,y}/r$ (mit r als ganzer Zahl) zur Instabilität führen.

[1] Vgl. die an zweiter Stelle in Fußnote 2 von S. 137 aufgeführte Arbeit.

Partikuläre Integrale der inhomogenen Gleichungen führen dagegen zu einer Resonanz im üblichen Sinne, wenn ω in der Nähe von $\omega_{k\,y}$ liegt. Wir wollen solche Werte von ω, für die bereits die Grundbewegung instabil ist oder Resonanzverhalten zeigt, aus unseren weiteren Überlegungen ausschließen. Außerhalb dieser Instabilitäts- bzw. Resonanzbereiche, in denen größere Auslenkungen v auftreten, wollen wir fortan den Beitrag $P_1 \cos \omega t \cdot v$ zum Biegemoment $M_z(x,t)$ als Nebeneinfluß vernachlässigen und erhalten als Näherungen die Gleichungen (14) ohne die Glieder mit P_1 auf der linken Seite. Die Berechtigung dieser Annahme geht aus den Bemerkungen hervor, die im Abschnitt 3 zu der dort eingeführten Näherung (sehr kleine Krümmung v'') gemacht wurden. Die Lösungen der homogenen Gleichungen interessieren nicht, da sie nach Voraussetzung abgeklungen sein sollen; für die $v_k(t)$ können wir dann eine harmonische Bewegung $v_k(t) = v_{0\,k} + v_{1\,k} \cos \omega t$ mit der vorgegebenen Frequenz ω ansetzen und erhalten aus (14) nach kurzer Zwischenrechnung

$$v(x,t) = \frac{2\,l^3}{B_z \pi^3} \left\{ \sum_{k=1,3,5\ldots}^{\infty} \left[\frac{2 \sin \frac{k\pi x}{l}}{k\,(k^2 - \varepsilon_P)} \left| \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 p_0 + M_{10} + \frac{\cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{k\,y}}\right)^2} \left[\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2 p_1 + M_{11} \right] \right| \right] - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1,2\ldots}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k \sin \frac{k\pi x}{l}}{k\,(k^2 - \varepsilon_P)} \left| M_{20} - M_{10} + \frac{(M_{21} - M_{11}) \cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{k\,y}}\right)^2} \right| \right] \right\}. \tag{15}$$

Wir wollen noch vereinfachen und nehmen $\varepsilon_P \ll 1$ an, da in der Praxis aus Sicherheitsgründen meist nur Längskräfte $P_0 \ll P_{E1}$ zugelassen werden. Wir können dann $k^2 - \varepsilon_P \approx k^2$ für alle $k \geq 3$ setzen. Da uns ferner nur Erregerfrequenzen $\omega \leq 2\,\omega_{z\,n}$ oder $\omega \leq 2\,\omega_{t\,n}$ interessieren, nehmen die Quotienten $(\omega/\omega_{k\,y})^2$ näherungsweise höchstens die Größe

$$4 \left(\frac{n}{k}\right)^4 \frac{I_y}{I_z} \quad \text{oder} \quad 4 \cdot 10^{-3} \frac{n^2}{k^4} \frac{l^2 F^2}{i_p^6} \left[1 + \left(\frac{2\,n\pi h\, i_p i_y}{F l} \right)^2 \right]$$

an und können für kleine n in den meisten praktisch interessierenden Fällen für alle $k \geq 3$ gegenüber 1 vernachlässigt werden. [Vgl. hierzu die entsprechenden Abschätzungen unter Ziff. 4a)]. Mit diesen Näherungsannahmen erhalten wir nach einigen Zwischenrechnungen aus (15)

$$\left. \begin{aligned} -B_z v'' = {} & M_{10} + (M_{20} - M_{10}) \frac{x}{l} + \frac{p_0 x}{2}(l - x) + \\ & + \frac{\varepsilon_P}{\pi} \left\{ \frac{2}{1 - \varepsilon_P} \left[2\,p_0 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 + M_{10} + M_{20} \right] \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{4 - \varepsilon_P} (M_{20} - M_{10}) \sin \frac{2\pi x}{l} \right\} + \\ & + \cos \omega t \left\{ M_{11} + (M_{21} - M_{11}) \frac{x}{l} + \frac{p_1 x}{2}(l - x) + \right. \\ & + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{1\,y}}\right)^2 \right\} (1 - \varepsilon_P)} - 1 \right] \left(2\,p_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 + M_{11} + M_{21} \right) \sin \frac{\pi x}{l} - \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{2\,y}}\right)^2 \right\} (1 - \varepsilon_P)} - 1 \right] (M_{21} - M_{11}) \sin \frac{2\pi x}{l} \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

5. Näherungsweise Zurückführung des allgemeinen Belastungsfalles auf die Belastung durch gleichgroße pulsierende Endmomente. Es wäre grundsätzlich möglich, die Lösung (16) der Gleichungen des Grundbewegungszustandes im allgemeinen Belastungsfalle in die Gleichungen (7c) und (7d) einzuführen und diese zu integrieren. Versucht man das, so überzeugt man sich jedoch bald davon, daß der damit verbundene Rechenaufwand in keinem Verhältnis zum erzielbaren Erfolg stehen wird.

In einem speziellen Falle vereinfacht sich jedoch alles erheblich: Wenn nämlich nur zwei Endmomente $M_0 + M_1 \cos \omega t$ von gleicher Größe wirken und außerdem $(\omega/\omega_{1\,y})^2$ gegenüber „eins" vernachlässigt werden kann, ist einfach $B_z v'' = -(M_0 + M_1 \cos \omega t)$ und die Differentialgleichungen des Nachbarbewegungszustandes lauten

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{w} + \frac{B_y}{\varrho} w^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{\varrho} (M_0 + M_1 \cos \omega t)\, \vartheta'' = 0, \\ & \ddot{\vartheta} + \frac{h^2 B_y}{4\,\varrho\, i_p^2} \vartheta^{\mathrm{IV}} - \frac{C}{\varrho\, i_p^2} \vartheta'' + \frac{M_0 + M_1 \cos \omega t}{\varrho\, i_p^2} w'' = 0. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Auf diesen Fall müßte der allgemeine Belastungsfall reduziert werden, um eine möglichst große Vereinfachung zu erzielen. Das kann z. B. auf einem der folgenden beiden Wege geschehen:

a) Die Durchbiegung der Grundbewegung kann in der Form

$$v(x,t) = v_s(x) + v_d(x)\cos\omega t$$

geschrieben werden, wo $v_s(x)$ die statische Durchsenkung und $v_d(x)$ die Amplitude der durch die periodisch veränderlichen Kräfte hervorgerufenen (dynamischen) Durchsenkung bedeutet. Nun wird eine möglichst einfache Durchbiegungskurve

$$\bar{v}(x,t) = \bar{v}_s(x)\cos\omega t$$

angenommen mit der Forderung, daß die Maximalwerte ihres statischen und dynamischen Anteils gleich den entsprechenden Anteilen von $v(x,t)$ sind. Wenn dann auch der Verlauf der Durchbiegung in Abhängigkeit von x in beiden Fällen verschieden ist, so wird man auf diese Weise doch im allgemeinen eine vernünftige Näherung erwarten dürfen. Für $\bar{v}(x,t)$ nehmen wir die bei gleichen Endmomenten $M_0 + M_1\cos\omega t$ unter der Voraussetzung $(\omega/\omega_{1y})^2 \ll 1$ entstehende Durchbiegungskurve

$$\bar{v}(x,t) = \frac{x}{2B_z}(l-x)\,(\overline{M}_0 + \overline{M}_1\cos\omega t)$$

mit

$$\bar{v}_{s\,max} = \bar{v}_s\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{l^2}{8B_z}\overline{M}_0\,, \qquad \bar{v}_{d\,max} = \bar{v}_d\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{l^2}{8B_z}\overline{M}_1.$$

Die Bedingungen $\bar{v}_{s\,max} = v_{s\,max}$ und $\bar{v}_{d\,max} = v_{d\,max}$ liefern uns dann die konstanten Näherungsmomente $\overline{M}_0$ und $\overline{M}_1$.

b) Die durch zwei verschiedene Belastungen hervorgerufenen Grundzustände werden sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden, wenn in beiden Fällen die im Träger aufgespeicherte Formänderungsarbeit dieselbe Größe hat. Mit Gleichung (16), für die wir abgekürzt

$$B_z v''(x,t) = M_s(x) + M_d(x)\cos\omega t$$

schreiben, hat die Formänderungsarbeit, welche durch eine allgemeine Belastung zu irgend einer Zeit t im Träger aufgespeichert wird, die Größe

$$U(t) = \frac{B_z}{2}\int_{x=0}^{l}[v''(x,t)]^2\,dx = \frac{1}{2B_z}\int_{x=0}^{l}[M_s(x) + M_d(x)\cos\omega t]^2\,dx.$$

Andererseits ist die durch gleiche Endmomente $\overline{M} = \overline{M}_0 + \overline{M}_1\cos\omega t$ erzeugte Formänderungsarbeit

$$\overline{U}(t) = \frac{1}{2B_z}\int_{x=0}^{l}[\overline{M}_0 + \overline{M}_1\cos\omega t]^2\,dx.$$

Durch Gleichsetzen beider Arbeitsbeträge ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Näherungsmomente.

Der Nachbarbewegungszustand kann also näherungsweise stets durch die Differentialgleichungen (17) beschrieben werden, wenn dort die Momente M_0 bzw. M_1 durch die aus einer der beiden Näherungen folgenden Momente $\overline{M}_0$ bzw. M_1 ersetzt werden.

6. Der Nachbarbewegungszustand bei Belastung durch gleichgroße pulsierende Endmomente. a) Lösungsansatz. Nach Abschnitt 5 genügt für eine näherungsweise Behandlung aller Belastungsfälle die weitere Untersuchung der beiden gekoppelten Differentialgleichungen (17), d. h. der Gleichungen für Belastung durch gleich große pulsierende Endmomente. Wir transformieren sie in eine dimensionslose Form, indem wir die neuen Variablen

$$\xi = \frac{x}{l}\,, \qquad \eta = \frac{w}{h}\,, \qquad \tau = \sqrt{\frac{B_y}{\varrho}}\,\frac{1}{l^2\varkappa_1}\,t \tag{18}$$

und die dimensionslosen Trägerkonstanten

$$\varkappa_1 = \frac{i_p}{h}\,, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{C}{B_y}}\,\frac{l}{h}\,, \qquad \mu_1 = \varkappa_1^2\mu_2, \qquad \mu_2 = \frac{M_{kr}\,l^2}{B_y\,h} \tag{19}$$

mit M_{kr} = erstes kritisches Moment des statischen Kipproblems einführen. Wir wählen als Parameter

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{M_{kr}}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{M_1}{M_{kr}} \tag{20}$$

und setzen voraus, daß beide klein gegenüber „eins" sein sollen; damit haben wir alle praktisch wichtigen Fälle erfaßt, bei denen die Momentenamplituden weit unterhalb der kritischen Kippmomente liegen. Die Störfrequenz ω geht bei der Transformation in die dimensionslose „Störfrequenz"

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varrho}{B_y}}\, l^2 \varkappa_1 \omega \tag{21}$$

über. Diese Umrechnung gilt für alle Frequenzen. Wir wollen M_{kr}, das sich aus dem ersten Eigenwert der Gleichungen (17) für den statischen Sonderfall $\ddot{w} = \ddot{\vartheta} = \omega = 0$ ergibt, für unsere weiteren Rechnungen als bekannt voraussetzen. Die Gleichungen (17) gehen dann über in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\eta} + \varkappa_1^2 \eta^{\mathrm{IV}} + \mu_1(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \alpha \tau)\, \vartheta'' = 0, \\ &\ddot{\vartheta} + \frac{1}{4}\, \vartheta^{\mathrm{IV}} - \varkappa_2^2 \vartheta'' + \mu_2 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos \alpha \tau)\, \eta'' = 0, \end{aligned}\right| \tag{22}$$

zu denen nach (8) die folgenden Randbedingungen hinzutreten:

$$\left.\begin{aligned} &\eta(0,\tau) = \eta(1,\tau) = \eta'(0,\tau) - C_1 \eta''(0,\tau) = \eta'(1,\tau) + C_2 \eta''(1,\tau) = 0, \\ &\vartheta(0,\tau) = \vartheta(1,\tau) = \vartheta'(0,\tau) - C_1 \vartheta''(0,\tau) = \vartheta'(1,\tau) + C_2 \vartheta''(1,\tau) = 0. \end{aligned}\right| \tag{23}$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen soll mit Hilfe eines „Störungsansatzes" in der Weise durchgeführt werden, daß dem geschlossen lösbaren „ungestörten" Randwertproblem ($\varepsilon_1 = 0$) das „gestörte" Randwertproblem ($\varepsilon_1 \neq 0$) mit denselben Randbedingungen superponiert wird, wobei für die Lösung des letzteren eine Entwicklung von η und ϑ nach Potenzen von ε_1 angesetzt wird:

$$\eta(\xi,\tau) = \eta_0(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\xi,\tau)\, \varepsilon_1^n, \qquad \vartheta(\xi,\tau) = \vartheta_0(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\xi,\tau)\, \varepsilon_1^n. \tag{24}$$

Wir setzen dabei die Entwickelbarkeit von η und ϑ nach Potenzen von ε_1 voraus und wollen annehmen, daß für diese Entwicklung ein von Null verschiedener Konvergenzradius besteht; während die Konvergenz dieses Verfahrens für gewöhnliche Differentialgleichungen unter weitreichenden Voraussetzungen gesichert ist, ist diese Frage allerdings für partielle Differentialgleichungen, soweit bekannt, noch ungeklärt. Man wird aber sicherlich Konvergenz erwarten dürfen, da die Lösung für $\varepsilon_1 = 0$ existiert, und es physikalisch plausibel ist, daß sie hinsichtlich ε_1 stetig ist. Mit diesem Ansatz erhalten wir zunächst die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\eta}_0 + \varkappa_1^2 \eta_0^{\mathrm{IV}} = -\mu_1 \varepsilon_0 \vartheta_0'', \\ &\ddot{\vartheta}_0 + \frac{1}{4}\, \vartheta_0^{\mathrm{IV}} - \varkappa_2^2 \vartheta_0'' = -\mu_2 \varepsilon_0 \eta_0'' \end{aligned}\right| \tag{25}$$

für das ungestörte Problem; d.h. also die Differentialgleichungen der freien Transversal- und Torsionsschwingungen. Weiterhin ergeben sich die $2n$ Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\eta}_n + \varkappa_1^2 \eta_n^{\mathrm{IV}} = -\mu_1 \cos \alpha \tau \cdot \vartheta_{n-1}'', \\ &\ddot{\vartheta}_n + \frac{1}{4}\, \vartheta_n^{\mathrm{IV}} - \varkappa_2^2 \vartheta_n'' = -\mu_2 \cos \alpha \tau \cdot \eta_{n-1}'', \end{aligned}\right| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{26}$$

in deren rechte Seiten die Lösungen der jeweils vorhergehenden Gleichungen eingehen. Ausgehend von den beiden Gleichungen für $n = 1$, auf deren rechten Seiten die Lösungen von (25) einzusetzen sind, hat man die $2n$ Gleichungen sukzessiv zu lösen, wobei jede der Funktionen η_n und ϑ_n die Randbedingungen zu erfüllen hat. Diese Gleichungen lassen sich mathematisch in anderer Weise behandeln als die ähnlich aufgebauten, jedoch von zwei Ortsvariablen abhängigen Bewegungsgleichungen der Arbeit von *W. Kucharski*[1]: In der II. Mitteilung jener Arbeit mußten die rechten Seiten der dortigen Gleichungen (5), die die Randbedingungen nicht erfüllen, nach den Eigenfunktionen der freien Schwingungen entwickelt werden. Das ist beim vorliegenden

[1] Vgl. Fußnote 3 auf S. 137.

Problem nicht erforderlich; die dabei auftretenden Schwierigkeiten lassen sich hier durch Produktansätze für die η_n und ϑ_n umgehen, welche die partiellen Differentialgleichungen (26) in Randwertaufgaben für gewöhnliche inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten überführen. [Näheres darüber unter c).]

b) Freie Schwingungen. Wir wollen dabei zwei Fälle unterscheiden: Fall 1: Es sei keine statische Vorbelastung durch ein Moment vorhanden ($\varepsilon_0 = 0$). Man kommt dann mit den Ansätzen

$$\eta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{0k}(\xi)\varphi_{0k}(\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{0k}(\xi)\psi_{0k}(\tau) \tag{27}$$

zu einer Lösung: Aus (25) folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{\varphi}_{0k} + \omega_{bk}^2 \varphi_{0k} = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\psi}_{0k} + \omega_{dk}^2 \psi_{0k} = 0 \tag{28}$$

für die Zeitfunktionen $\varphi_{0k}(\tau)$ und $\psi_{0k}(\tau)$ sowie

$$U_{0k}^{\mathrm{IV}} - \frac{\omega_{bk}^2}{\varkappa_1^2} U_{0k} = 0 \qquad \text{und} \qquad V_{0k}^{\mathrm{IV}} - 4\varkappa_2^2 V_{0k}'' - 4\omega_{dk}^2 V_{0k} = 0 \tag{29}$$

für die Koordinaten-Funktionen $U_{0k}(\xi)$ und $V_{0k}(\xi)$. Die Gleichungen (28) haben die k Lösungen

$$\varphi_{0k}(\tau) = A_k \cos\omega_{bk}\tau + B_k \sin\omega_{bk}\tau\,; \qquad \psi_{0k}(\tau) = C_k \cos\omega_{dk}\tau + D_k \sin\omega_{dk}\tau\,. \tag{30}$$

Die k Lösungen der Eigenwertdifferentialgleichungen (29) sind

$$\left.\begin{aligned} U_{0k}(\xi) &= a_{1k}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k\xi + a_{2k}\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k\xi + a_{3k}\cos\lambda_k\xi + a_{4k}\sin\lambda_k\xi\,, \\ V_{0k}(\xi) &= b_{1k}\,\mathfrak{Cof}\,\nu_k\xi + b_{2k}\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k\xi + b_{3k}\cos\bar{\nu}_k\xi + b_{4k}\sin\bar{\nu}_k\xi\,, \end{aligned}\right| \tag{31}$$

wobei die k-ten (dimensionslosen) „Eigenfrequenzen" ω_{bk} bzw. ω_{dk} der freien Transversal- bzw. Torsionsschwingungen mit den Eigenwerten λ_k, ν_k, $\bar{\nu}_k$ durch die Gleichungen

$$\omega_{bk}^2 = \lambda_k^4 \varkappa_1^2, \quad \omega_{dk}^2 = \frac{\nu_k^4}{4} - \varkappa_2^2\nu_k^2 = \frac{\bar{\nu}_k^4}{4} + \varkappa_2^2\bar{\nu}_k^2, \quad \bar{\nu}_k^2 = \nu_k^2 - 4\varkappa_2^2 \tag{32}$$

verknüpft und mittels (21) auf die wirklichen Eigenfrequenzen ω_{zk} bzw. ω_{tk} umzurechnen sind.

Die Forderung, daß die U_{0k} bzw. V_{0k} die Randbedingungen erfüllen müssen, führt zu acht homogenen Gleichungen für die Koeffizienten a_{rk} und b_{rk} von (31) von der Form

$$\sum_{r=1}^{4} \alpha_{ir}\, a_{rk} = 0\,, \qquad \sum_{r=1}^{4} \beta_{ir}\, b_{rk} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,,$$

welche das Verschwinden der Koeffizienten-Determinanten $\Delta(\alpha_{ir})$ und $\Delta(\beta_{ir})$ zur Folge haben. Die Ausrechnung ergibt die beiden transzendenten Frequenzgleichungen zur Berechnung der Eigenwerte λ_k und ν_k bzw. $\bar{\nu}_k$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{C}(\lambda_k) - 2\lambda_k\left[(C_1 + C_2)\,\mathfrak{B}(\lambda_k) + \lambda_k C_1 C_2\,\mathfrak{S}(\lambda_k)\right] = 2\,, \\ &2\bar{\nu}_k\cos\bar{\nu}_k\,\mathfrak{Cof}\,\nu_k + (C_1 + C_2)(\nu_k^2 + \bar{\nu}_k^2)(\cos\bar{\nu}_k\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k - \sin\bar{\nu}_k\,\mathfrak{Cof}\,\nu_k) - \\ &\qquad - \frac{1}{\nu_k}\sin\bar{\nu}_k\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k\left[C_1 C_2(\nu_k^2 + \bar{\nu}_k^2)^2 + \bar{\nu}_k^2 - \nu_k^2\right] = 2\nu_k \end{aligned}\right| \tag{33}$$

mit [1]

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}(\lambda_k) &= \mathfrak{Cof}\,\lambda_k\sin\lambda_k - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k\cos\lambda_k\,, \\ \mathfrak{C}(\lambda_k) &= 2\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_k\cos\lambda_k\,, \qquad \mathfrak{S}(\lambda_k) = 2\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k\sin\lambda_k\,. \end{aligned}\right| \tag{33'}$$

Für spezielle Einspannungsfälle vereinfachen sich die Frequenzgleichungen: Wir erhalten z. B. für freie Auflagerung an den Trägerenden ($1/C_1 = 1/C_2 = 0$) erstens $\sin\lambda_k = 0$, d. h. $\lambda_k = k\pi$ und daraus nach (32) $\omega_{bk}^2 = (k\pi)^4\varkappa_1^2$, sowie zweitens $\sin\bar{\nu}_k\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k = 0$, d. h. $\bar{\nu}_k = k\pi$, woraus $\omega_{dk}^2 = \frac{1}{4}(k\pi)^4 + \varkappa_2^2(k\pi)^2$ folgt.

Die Gleichungen (31) lassen sich nach Einsetzen in die Randbedingungen auch in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned} U_{0k}(\xi) &= M_k\,(\mathfrak{Cof}\,\lambda_k\xi - \cos\lambda_k\xi + P_k\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k\xi + Q_k\sin\lambda_k\xi), \\ V_{0k}(\xi) &= N_k\,(\mathfrak{Cof}\,\nu_k\xi - \cos\bar{\nu}_k\xi + R_k\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k\xi + S_k\sin\bar{\nu}_k\xi) \end{aligned}\right| \tag{34}$$

[1] Die Funktionen $\mathfrak{B}(\lambda_k)$ usw. sind bei *Hohenemser-Prager*, Dynamik der Stabwerke, tabuliert.

mit den Konstanten

$$\left.\begin{aligned} &M_k = a_{1k} = \text{beliebig}, \qquad N_k = b_{1k} = \text{beliebig}, \\ &\left.\begin{matrix} P_k \\ Q_k \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{\sin\lambda_k - \mathfrak{Sin}\,\lambda_k}\left[\mathfrak{Cof}\,\lambda_k - \cos\lambda_k + 2\,C_1\,\lambda_k\begin{pmatrix}\sin\lambda_k\\ \mathfrak{Sin}\,\lambda_k\end{pmatrix}\right], \\ &\left.\begin{matrix} R_k \\ S_k \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{\nu_k \sin\bar{\nu}_k - \bar{\nu}_k\,\mathfrak{Sin}\,\nu_k}\left[\begin{pmatrix}\bar{\nu}_k\\ \nu_k\end{pmatrix}(\mathfrak{Cof}\,\nu_k - \cos\bar{\nu}_k) + C_1\,(\nu_k^2 + \bar{\nu}_k^2)\begin{pmatrix}\sin\bar{\nu}_k\\ \mathfrak{Sin}\,\nu_k\end{pmatrix}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (25) des ungestörten Problems lauten also für $\varepsilon_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \eta_0(\xi,\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[U_{0k}(\xi)\,(A_k\cos\omega_{bk}\tau + B_k\sin\omega_{bk}\tau)\right], \\ \vartheta_0(\xi,\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[V_{0k}(\xi)\,(C_k\cos\omega_{dk}\tau + D_k\sin\omega_{dk}\tau)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Die Eigenfunktionen $U_{0k}(\xi)$ und $V_{0k}(\xi)$ bilden dabei für alle Randbedingungen zwei orthogonale Funktionen-Systeme, was direkt aus den Differentialgleichungen (29) geschlossen werden kann: Sind λ_m und λ_n zwei verschiedene Eigenwerte und U_{0m}, U_{0n} die zugehörigen Eigenfunktionen der ersten Gleichung, so ergibt sich durch Multiplikation von

$$U_{0m}^{\mathrm{IV}}(\xi) - \lambda_m^4\,U_{0m}(\xi) = 0 \qquad \text{mit} \quad U_{0n}(\xi)$$

und

$$U_{0n}^{\mathrm{IV}}(\xi) - \lambda_n^4\,U_{0n}(\xi) = 0 \qquad \text{mit} \quad U_{0m}(\xi)$$

und Bildung der Differenz sowie durch zweimalige Teilintegration

$$\begin{aligned} (\lambda_n^4 - \lambda_m^4)\int_{\xi=0}^{1} U_{0n}(\xi)\,U_{0m}(\xi)\,d\xi &= \int_{\xi=0}^{1}(U_{0n}^{\mathrm{IV}}\,U_{0m} - U_{0m}^{\mathrm{IV}}\,U_{0n})\,d\xi \\ &= [U_{0m}\,U_{0n}''' - U_{0n}\,U_{0m}'' - U_{0m}'\,U_{0n}'' + U_{0n}'\,U_{0m}'']_0^1. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen wird die rechte Seite dieser Gleichung Null; daraus folgt wegen $\lambda_m \neq \lambda_n$ die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\xi=0}^{1} U_{0n}(\xi)\,U_{0m}(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (m \neq n). \tag{36}$$

Entsprechend kann auch gezeigt werden, daß die $V_{0k}(\xi)$ orthogonale Eigenfunktionen sind.

Die beliebigen Konstanten M_k und N_k werden durch die Normierung

$$\int_{\xi=0}^{1} U_{0k}^2(\xi)\,d\xi = 1, \quad \int_{\xi=0}^{1} V_{0k}^2(\xi)\,d\xi = 1 \tag{37}$$

festgelegt.

Fall 2: Statische Vorbelastung durch Moment M_0 ($\varepsilon_0 \neq 0$). Wir kommen jetzt mit dem Ansatz

$$\eta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[U_{0k}(\xi)\,\varphi_{0k}(\tau)\right], \qquad \vartheta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[V_{0k}(\xi)\,\varphi_{0k}(\tau)\right] \tag{38}$$

aus. Durch Einsetzen in (25) ergeben sich die Differentialgleichungen $\ddot{\varphi}_{0k} + \omega_k^2\varphi_{0k}$ mit den k Lösungen

$$\varphi_{0k}(\tau) = A_k\cos\omega_k\tau + B_k\sin\omega_k\tau \tag{39}$$

für die Zeitfunktionen und die gekoppelten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &U_{0k}^{\mathrm{IV}} - \frac{\omega_k^2}{\varkappa_1^2}\,U_{0k} + \frac{\mu_1\varepsilon_0}{\varkappa_1^2}\,V_{0k}' = 0, \\ &V_{0k}^{\mathrm{IV}} - 4\,\varkappa_2^2\,V_{0k}'' - 4\,\omega_k^2\,V_{0k} + 4\,\mu_2\,\varepsilon_0\,U_{0k}'' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

für die Koordinaten-Funktionen, aus denen man durch Elimination von V_{0k} die k Differentialgleichungen achter Ordnung

$$U_{0k}^{\mathrm{VIII}} - 4\,\varkappa_2^2\,U_{0k}^{\mathrm{VI}} - \frac{1}{\varkappa_1^2}(\omega_k^2 + 4\,\mu_1\mu_2\,\varepsilon_0^2 + 4\,\varkappa_1^2\omega_k^2)\,U_{0k}^{\mathrm{IV}} + 4\,\frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2}\,\omega_k^2\,U_{0k}'' + 4\,\frac{\omega_k^4}{\varkappa_1^2}\,U_{0k} = 0$$

für die V_{0k} bekommt, nach deren Integration sich die V_{0k} aus einer der beiden Gleichungen (40) bestimmen lassen. Für den Spezialfall der freien Auflagerung an den Trägerenden erhält man z. B. mit dem Ansatz $U_{0k}(\xi) = M_k \sin k\pi\xi$ nach kurzer Rechnung

$$\left.\begin{matrix}\omega_{k1}^2\\ \omega_{k2}^2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\omega_{dk}^2 + \omega_{bk}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_{dk}^2 - \omega_{bk}^2)^2 + \mu_1\mu_2\varepsilon_0(k\pi)^4}\,.$$

Entsprechend (39) können freie Schwingungen mit den verschiedenen ω_{k1}, ω_{k2} gleichzeitig auftreten, so daß die Gesamtlösung lautet

$$\eta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}[U_{0k}(\xi)\,(A_k\cos\omega_{k1}\tau + B_k\sin\omega_{k1}\tau + C_k\cos\omega_{k2}\tau + D_k\sin\omega_{k2}\tau)],$$

$$\vartheta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}[V_{0k}(\xi)\,(A_k\cos\omega_{k1}\tau + B_k\sin\omega_{k1}\tau + C_k\cos\omega_{k2}\tau + D_k\sin\omega_{k2}\tau)].$$

c) Erzwungene Schwingungen ohne statische Vorbelastung. Die Differentialgleichungen (26) sollen der besseren Übersicht wegen für den Fall 1 ($\varepsilon_0 = 0$) integriert werden. Der im folgenden dargestellte Rechnungsgang wird aber auch für $\varepsilon_0 \neq 0$ im wesentlichen der gleiche bleiben.

Die in den Lösungen (35) des ungestörten Problems auftretenden Konstanten A_k, B_k, C_k und D_k könnten bestimmt werden, falls für $t = 0$ bestimmte Bedingungen für die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit vorgegeben wären, z. B. durch

$$\left.\begin{aligned} f_1(\xi) = \eta_0(\xi,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,U_{0k}(\xi), \qquad g_1(\xi) = \dot\eta_0(\xi,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_{bk}\,B_k\,U_{0k}(\xi),\\ f_2(\xi) = \vartheta_0(\xi,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,V_{0k}(\xi), \qquad g_2(\xi) = \dot\vartheta_0(\xi,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_{dk}\,D_k\,V_{0k}(\xi).\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Im vorliegenden Falle sind die Anfangsbedingungen und damit auch die Funktionen (41) willkürlich wählbar.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} A_k\cos(\omega_{bk} + q\alpha)\tau + B_k\sin(\omega_{bk} + q\alpha)\tau = \varphi_{q,k}(\tau),\\ C_k\cos(\omega_{dk} + q\alpha)\tau + D_k\sin(\omega_{dk} + q\alpha)\tau = \psi_{q,k}(\tau),\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

worin q alle ganzen Zahlen einschließlich Null bedeuten kann, so erhalten wir mit (35) aus (26) (für $n = 1$) und wegen

$$\varphi_{q,k}\cos\alpha\tau = \frac{1}{2}(\varphi_{q-1,k} + \varphi_{q+1,k}), \qquad \psi_{q,k}\cos\alpha\tau = \frac{1}{2}(\psi_{q-1,k} + \psi_{q+1,k})$$

folgende Gleichungen zur Bestimmung von η_1 und ϑ_1:

$$\left.\begin{aligned} \ddot\eta_1 + \varkappa_1^2\eta_1^{\mathrm{IV}} = -\frac{\mu_1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[V_{0k}''(\psi_{-1,k} + \psi_{+1,k})],\\ \ddot\vartheta_1 + \frac{1}{4}\vartheta_1^{\mathrm{IV}} - \varkappa_2^2\vartheta_1'' = -\frac{\mu_2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[U_{0k}''(\varphi_{-1,k} + \varphi_{+1,k})]\,.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Die Lösungen der homogenen Gleichungen entsprechen genau den Lösungen des ungestörten Problems, jedoch mit anderen willkürlichen Konstanten $\bar A_k, \ldots, \bar D_k$, die gleich Null gesetzt werden. Somit interessiert nur je eine partikulare Lösung der inhomogenen Gleichung (43), für die wir

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}[U_{-1,1k}(\xi)\,\psi_{-1,k}(\tau) + U_{+1,1k}(\xi)\,\psi_{+1,k}(\tau)],\\ \vartheta_1(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}[V_{-1,1k}(\xi)\,\varphi_{-1,k}(\tau) + V_{+1,1k}(\xi)\,\varphi_{+1,k}(\tau)]\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

ansetzen. Der erste Index der Koordinaten-Funktionen bezieht sich auf die jeweils mit ihnen verknüpfte Zeitfunktion (also auf q), während der zweite Index die zu integrierende Gleichung von (26) angibt. Mit diesen Ansätzen und mit

$$\ddot\varphi_{q,k}(\tau) = -(\omega_{bk} + q\alpha)^2\,\varphi_{q,k}(\tau), \qquad \ddot\psi_{q,k}(\tau) = -(\omega_{dk} + q\alpha)^2\,\psi_{q,k}(\tau)$$

erhalten wir aus (43) $4\,k$ Bedingungsgleichungen für die Koordinaten-Funktionen

$$\left.\begin{aligned} U^{\mathrm{IV}}_{\mp 1,1k} - \frac{(\omega_{dk} \mp \alpha)^2}{\varkappa_1^2}\, U_{\mp 1,1k} &= u_{1k}\,\mathfrak{Cof}\, \nu_k \xi + u_{2k}\,\mathfrak{Sin}\, \nu_k \xi + \\ &\quad + u_{3k} \cos \bar{\nu}_k \xi + u_{4k} \sin \bar{\nu}_k \xi = F_1(\xi)\,, \\ V^{\mathrm{IV}}_{\mp 1,1k} - 4\,\varkappa_2^2\, V''_{\mp 1,1k} - 4\,(\omega_{bk} \mp \alpha)^2\, V_{\mp 1,1k} &= v_{1k}\,\mathfrak{Cof}\, \lambda_k \xi + v_{2k}\,\mathfrak{Sin}\, \lambda_k \xi + \\ &\quad + v_{3k} \cos \lambda_k \xi + v_{4k} \sin \lambda_k \xi = F_2(\xi)\,, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

worin die auf der rechten Seite stehenden Koeffizienten u_{ik}, v_{ik} bekannte, von den Randbedingungen und den Eigenwerten λ_k, ν_k und $\bar{\nu}_k$ abhängige Ausdrücke von endlicher Größe sind. Es sind also $4\,k$ Randwertaufgaben zu lösen, bei denen alle Koordinaten-Funktionen die Randbedingungen zu erfüllen haben. Ihre Lösungen setzen sich zusammen aus den mit den Konstanten $c_{\mp ik}$ bzw. $d_{\mp ik}$ behafteten endlichen Lösungen $\bar{U}_{\mp ki}$ bzw. $\bar{V}_{\mp ki}$ der homogenen Gleichungen und den Partikularlösungen $U_{\mp kp}$ bzw. $V_{\mp kp}$:

$$\left.\begin{aligned} U_{\mp 1,1k} &= \sum_{i=1}^{4} c_{\mp ik}\, \bar{U}_{\mp ik} + U_{\mp kp}\,, \\ V_{\mp 1,1k} &= \sum_{i=1}^{4} d_{\mp ik}\, \bar{V}_{\mp ik} + V_{\mp kp}\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die Konstanten $c_{\mp ik}$ bzw. $d_{\mp ik}$ sind so zu bestimmen, daß die jeweils vier Randbedingungen (23) erfüllt sind, für die wir

$$R_{rk}(U_{\mp 1,1k}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad S_{rk}(V_{\mp 1,1k}) = 0\,, \quad (r = 1, \ldots 4)\,,$$

schreiben wollen. Setzen wir die Lösungen (46) hierin ein, so erhalten wir die inhomogenen Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{4} \gamma_{rik}\, c_{\mp ik} = -\,R_{rk}(U_{\mp kp})\,, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_{rik}\, d_{\mp ik} = -\,S_{rk}(V_{\mp kp})\,, \tag{47}$$

zur Bestimmung der $c_{\mp ik}$, bzw. $d_{\mp ik}$, welche stets dann genau eine Lösung haben, wenn ihre Determinanten

$$\Delta(\gamma_{rik}) \neq 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \Delta(\varepsilon_{rik}) \neq 0\,, \tag{48}$$

von Null verschieden sind. Dann errechnen sich die Konstanten aus

$$c_{\mp ik} = \frac{C_{\mp ik}}{\Delta(\gamma_{rik})}\,, \quad \text{bzw.} \quad d_{\mp ik} = \frac{D_{\mp ik}}{\Delta(\varepsilon_{rik})}\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{49}$$

wo die Zählerdeterminanten $C_{\mp ik}$ und $D_{\mp ik}$ im allgemeinen von Null verschieden sind. Falls die rechten Seiten von (47) Null werden, wenn also die Partikularlösungen der inhomogenen Gleichungen für sich allein allen Randbedingungen genügen, wie beim beiderseits aufgelagerten Träger, werden die Zählerdeterminanten null, da dann alle Elemente einer ihrer Spalten verschwinden; dann verschwinden alle $c_{\mp ik}$ und $d_{\mp ik}$ und die Partikularlösung ist bereits die vollständige Lösung.

Verschwinden dagegen die Determinanten (48) des Gleichungssystems, so haben die inhomogenen Randwertaufgaben im allgemeinen keine eigentlichen Lösungen. Sie sind aber in diesem Falle doch lösbar, falls jede Lösung $\bar{U}_{\mp ik}(\xi)$ bzw. $\bar{V}_{\mp ik}(\xi)$ der homogenen Gleichungen zu den rechten Seiten $F_1(\xi)$ bzw. $F_2(\xi)$ orthogonal ist, wenn also gilt[1]

$$\int_{\xi=0}^{1} \bar{U}_{\mp ik}(\xi) F_1(\xi)\, d\xi = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\xi=0}^{1} \bar{V}_{\mp ik}(\xi) F_2(\xi)\, d\xi = 0\,, \quad (i = 1, \ldots 4)\,.$$

Diese Bedingungen sind jedoch sicherlich nicht erfüllt, wie sich im einzelnen zeigen läßt. Wenn also die Determinanten (48) gegen Null gehen, haben die inhomogenen Differentialgleichungen keine eigentlichen Lösungen, so daß nach (49) die $c_{\mp ik}$ bzw. $d_{\mp ik}$ und damit auch die Lösungen (46) über alle Grenzen wachsen.

Das Verschwinden der Determinanten (48) bedeutet gleichzeitig, daß die zugehörigen homogenen Differentialgleichungen (45) Lösungen haben, die den Randbedingungen angepaßt sind. Diese sind aber wiederum bis auf die bei $U_{\mp 1,1k}$ bzw. $V_{\mp 1,1k}$ stehenden Konstanten den Differen-

[1] Vgl. z. B. *Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden, S. 188. Leipzig 1943.

tialgleichungen (29) gleich. Die Bedingung, daß die Lösungen beider Differentialgleichungen denselben Randbedingungen genügen müssen, ist aber nur dann zu erfüllen, wenn die Menge der Konstanten in den sich entsprechenden Gleichungen für beliebige k übereinstimmt, d.h. wenn

$$\omega_{bn}^2 = (\omega_{dk} \mp \alpha)^2 , \quad \text{bzw.} \quad \omega_{dn}^2 = (\omega_{bk} \mp \alpha)^2 ,$$

ist. Mit anderen Worten: Wenn die Erregerfrequenz die Werte

$$\alpha = |\omega_{dk} \mp \omega_{bn}| \tag{50}$$

annimmt, wachsen die Lösungen (46) über alle Grenzen. Darüber hinaus können sie auch noch gegen unendlich gehen, falls das ihre Partikularlösungen

$$\left.\begin{aligned} U_{\mp kp} = {} & \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2 \nu_k^4 - (\omega_{dk} \mp \alpha)^2} (u_{1k} \operatorname{Cof} \nu_k \xi + u_{2k} \operatorname{Sin} \nu_k \xi) + \\ & + \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2 \bar{\nu}^4 - (\omega_{dk} \mp \alpha)^2} (u_{3k} \cos \bar{\nu}_k \xi + u_{4k} \sin \bar{\nu}_k \xi) , \\ V_{\mp kp} = {} & \frac{1}{\lambda_k^4 - 4 \varkappa_2^2 \lambda_k^2 - 4 (\omega_{bk} \mp \alpha)^2} (v_{1k} \operatorname{Cof} \lambda_k \xi + v_{2k} \operatorname{Sin} \lambda_k \xi) + \\ & + \frac{1}{\lambda_k^4 + 4 \varkappa_2^2 \lambda_k^2 - 4 (\omega_{bk} \mp \alpha)^2} (v_{3k} \cos \lambda_k \xi + v_{4k} \sin \lambda_k \xi) \end{aligned}\right|$$

tun; d.h. wir erhalten auch noch Unendlichkeitsstellen für

$$\alpha = |\omega_{dk} \mp \nu_k^2 \varkappa_1| , \quad |\omega_{dk} \mp \bar{\nu}_k^2 \varkappa_1| , \quad \left|\omega_{bk} \mp \lambda_k \sqrt{\frac{1}{4} \lambda_k^2 \mp \varkappa_2^2}\right| . \tag{51}$$

Zur Berechnung der zu ε_1^2 proportionalen Störung erhalten wir in entsprechender Fortsetzung des Verfahrens durch Einsetzen von (44) in die Gleichungen (26) für $n = 2$

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 + \varkappa_1^2 \eta_2^{\mathrm{IV}} = {} & - \frac{\mu_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(V''_{-1,1k} + V''_{+1,1k}) \varphi_{0k} + V''_{-1,1k} \varphi_{-2,k} + V''_{+1,1k} \varphi_{+2,k}] , \\ \ddot{\vartheta}_2 + \frac{1}{4} \vartheta_2^{\mathrm{IV}} - \varkappa_2^2 \vartheta''_2 = {} & - \frac{\mu_2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(U''_{-1,1k} + U''_{+1,1k}) \psi_{0k} + U''_{-1,1k} \psi_{-2,k} + U''_{-1,1k} \psi_{+2,k}] . \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Bei der weiteren Rechnung ist zu beachten, daß in den auf der rechten Seite stehenden Zeitfunktionen $\varphi_{0k}(\tau)$ und $\psi_{0k}(\tau)$ die Frequenzen ω_{bk}, bzw. ω_{dk}, auftreten. Da die homogenen Lösungen von (52) den Lösungen der ungestörten Gleichungen (25) entsprechen und in ihnen daher dieselben Frequenzen ω_{bk}, bzw. ω_{dk}, auftreten — was dem „Resonanzfall" entspricht —, wird für die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_2 = {} & \sum_{k=1}^{\infty} [U_{2k} \tau (A_k \sin \omega_{bk} \tau - B_k \cos \omega_{bk} \tau) + \bar{U}_{2k,} \varphi_{ok} + U_{-2,2k} \varphi_{-2,k} + U_{+2,2k} \varphi_{+2,k}] , \\ \vartheta_2 = {} & \sum_{k=1}^{\infty} [V_{2k} \tau (C_k \sin \omega_{dk} \tau - D_k \cos \omega_{dk} \tau) + \bar{V}_{2k,} \psi_{ok} + V_{-2,2k} \psi_{-2,k} + V_{+2,2k} \psi_{+2,k}] \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

angesetzt. Durch Einsetzen in (52) ergeben sich wegen (69) und (70) die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} U_{2k}^{\mathrm{IV}} = {} & - \frac{\mu_1 \omega_{bk}}{4 \varkappa_1^2} (V''_{-1,1k} + V''_{+1,1k}) , \\ \left(\frac{1}{4} V''_{2k} - \varkappa_2^2 V_{2k}\right)'' = {} & - \frac{1}{4} \omega_{dk} \mu_2 (U''_{-1,1k} + U''_{+1,1k}) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

für die Koordinaten-Funktionen, wobei jetzt zur Abkürzung nur die für eine Näherung bis ε_1^2 wesentlichen Gleichungen hingeschrieben wurden.

Wir haben also ganz entsprechend wie beim ersten Rechnungsschritt zwei Randwertaufgaben zu lösen und erhalten als allgemeine Lösungen

$$\left.\begin{aligned} U_{2k} = {} & e_{1k} \xi^3 + e_{2k} \xi^2 + e_{3k} \xi + e_{4k} + U_{2kp} , \\ V_{2k} = {} & f_{1k} \operatorname{Cof} 2 \varkappa_2 \xi + f_{2k} \operatorname{Sin} 2 \varkappa_2 \xi + f_{3k} \xi + f_{4k} + V_{2kp} , \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

in denen die Konstanten e_{ik}, f_{ik} wiederum durch Einsetzen in die Randbedingungen ermittelt werden können und die aus (46) entstandenen Partikularlösungen U_{2kp} und V_{2kp} für alle Erreger-

frequenzen gegen unendlich gehen, für die die Funktionen $U_{\mp 1,1\,k}$ und $V_{\mp 1,1\,k}$ das tun. Darüber hinaus werden sie — wie sich zeigen läßt — auch noch unendlich für

$$\alpha = \omega_{bk}\,, \qquad \omega_{dk}\,, \qquad |\,\omega_{dk} \mp 4\,\varkappa_1\,\varkappa_2^2\,|\,. \tag{56}$$

Die Randbedingungen machten die Auflösung von zwei inhomogenen Gleichungssystemen

$$\sum_{i=1}^{4} \Gamma_{rik}\,e_{ik} = -\,R_{rk}\,(U_{2kp})\,, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{4} E_{rik}\,f_{ik} = -\,S_{rk}\,(V_{2kp})\,, \quad (r = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\,,$$

erforderlich, welche dann eine Lösung haben, wenn die Determinanten

$$\Delta(\Gamma_{rik}) = 1 + 4\,(C_1 + C_2) + 12\,C_1 C_2\,,$$

$$\Delta(E_{rik}) = 4\,\varkappa_2\,\{1 + \varkappa_2\,[(C_1 + C_2)\,(2\,\varkappa_2\,\mathfrak{Cof}\,2\,\varkappa_2 - \mathfrak{Sin}\,2\,\varkappa_2) + \mathfrak{Sin}\,2\,\varkappa_2\,(1 + 4\,\varkappa_2^2\,C_1 C_2)] - \mathfrak{Cof}\,2\,\varkappa_2\}$$

von Null verschieden sind. Beide Determinanten sind aber stets größer als Null, da die Konstanten C_1, C_2 und $\varkappa_2$ positiv sind. Die Konstanten e_{ik} bzw. f_{ik} und damit die Lösungen der homogenen Gleichungen gehen also nur dann gegen unendlich, falls die $R_{rk}(U_{2kp})$ bzw. $S_{rk}(V_{2kp})$ das tun; diese aus den Partikularlösungen U_{2kp} bzw. V_{2kp} entstandenen Ausdrücke wachsen aber für die durch (50), (51) und (56) angegebenen Frequenzen über alle Grenzen; damit sind sämtliche Unendlichkeitsstellen der U_{2k} und V_{2k} angegeben.

In dieser Weise setzt sich das Verfahren weiter fort. Für die Erörterung des Grundsätzlichen soll daher hier die Rechnung abgebrochen werden. Die Lösungen sind dann

$$\left.\begin{aligned}
\eta = \sum_{k=1}^{\infty} [&(U_{0k} + \varepsilon_1^2\,\overline{U}_{2k})\,\varphi_{0k} + \varepsilon_1\,(U_{-1,1\,k}\,\psi_{-1,k} + U_{+1,1\,k}\,\psi_{+1,k}) + \\
&+ \varepsilon_1^2\,U_{2k}\,\tau\,(A_k \sin\omega_{bk}\,\tau - B_k \cos\omega_{bk}\,\tau)] + O(\varepsilon_1^3)\,, \\
\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} [&(V_{0k} + \varepsilon_1^2\,\overline{V}_{2k})\,\psi_{0k} + \varepsilon_1\,(V_{-1,1\,k}\,\varphi_{-1,k} + V_{+1,1\,k}\,\varphi_{+1,k}) + \\
&+ \varepsilon_1^2\,V_{2k}\,\tau\,(C_k \sin\omega_{dk}\,\tau - D_k \cos\omega_{dk}\,\tau)] + O(\varepsilon_1^3)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Durch eine für das Weitere sehr wesentliche Umordnung der Reihenglieder werden darin alle bei den Konstanten $A_k, \ldots D_k$ stehenden Ausdrücke zusammengefaßt:

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= \sum_{k=1}^{\infty} [A_k\,g_{k1}^{(1)}(\xi,\tau) + B_k\,g_{k2}^{(1)}(\xi,\tau) + C_k\,g_{k1}^{(2)}(\xi,\tau) + D_k\,g_{k2}^{(2)}(\xi,\tau)] + O(\varepsilon_1^3)\,, \\
\vartheta &= \sum_{k=1}^{\infty} [A_k\,h_{k1}^{(1)}(\xi,\tau) + B_k\,h_{k2}^{(1)}(\xi,\tau) + C_k\,h_{k1}^{(2)}(\xi,\tau) + D_k\,h_{k2}^{(2)}(\xi,\tau)] + O(\varepsilon_1^3),
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

wobei die so entstehenden Funktionen $g_{ki}^{(j)}$, $h_{ik}^{(j)}$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ selbst wieder unendliche Reihen aus Produkten von Zeit- und Koordinaten-Funktionen sind, deren Ausrechnung wir oben bei $n = 2$ abgebrochen haben:

$$\left.\begin{aligned}
g_{k1}^{(1)}(\xi,\tau) &= [U_{0k}(\xi) + \varepsilon_1^2\,\overline{U}_{2k}(\xi)]\cos\omega_{bk}\,\tau + \varepsilon_1^2\,U_{2k}(\xi)\,\tau\sin\omega_{bk}\,\tau + O(\varepsilon_1^4)\,, \\
g_{k2}^{(1)}(\xi,\tau) &= [U_{0k}(\xi) + \varepsilon_1^2\,\overline{U}_{2k}(\xi)]\sin\omega_{bk}\,\tau - \varepsilon_1^2\,U_{2k}(\xi)\,\tau\cos\omega_{bk}\,\tau + O(\varepsilon_1^4)\,, \\
g_{k1}^{(2)}(\xi,\tau) &= \varepsilon_1\,[U_{-1,1\,k}(\xi)\cos(\omega_{dk} - \alpha)\,\tau + U_{+1,1\,k}(\xi)\cos(\omega_{dk} + \alpha)\tau] + O(\varepsilon_1^3)\,, \\
g_{k2}^{(2)}(\xi,\tau) &= \varepsilon_1\,[U_{-1,1\,k}(\xi)\sin(\omega_{dk} - \alpha)\,\tau + U_{+1,1\,k}(\xi)\sin(\omega_{dk} + \alpha)\tau] + O(\varepsilon_1^3)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Entsprechend lauten die $h_{ki}^{(j)}$, in denen nur ω_{bk} mit ω_{dk} vertauscht ist und die entsprechenden Koordinaten-Funktionen V_{0k} usw. an Stelle von U_{0k} usw. treten.

7. Die Untersuchung des Grundbewegungszustandes auf Stabilität. a) Aufstellung der Stabilitätskriterien. Der Grundbewegungszustand ist stabil, falls die Differentialgleichungen des Nachbarzustandes keine mit der Zeit anwachsenden Lösungen haben. Die Lösungen (58) scheinen aber in jedem Fall — d.h. für alle Erregerfrequenzen — instabil zu sein, da beispielsweise bei einigen der in ihren Einzellösungen (59) auftretenden Glieder die Zeit τ multiplikativ neben den trigonometrischen Funktionen steht und bei Weiterführung der Rechnung sogar Glieder mit $\tau^2, \tau^3, \ldots$ vorkommen. Das ist aber offensichtlich physikalisch sinnlos. Wir dürfen daraus auch in dieser Weise noch nicht auf eine Instabilität der Gesamtlösungen schließen, da in ihnen unendliche Reihen solcher Funktionen auftreten, über deren Verhalten noch nichts ausgesagt werden kann.

Zur Beantwortung der Stabilitätsfrage werden die in der Arbeit von *W. Kucharski*[1] abgeleiteten Sätze zugrundegelegt und für den vorliegenden Fall zweier gekoppelter Differentialgleichungen erweitert:

Da alle in (58) auftretenden Funktionen $g_{k\,i}^{(j)}$ und $h_{k\,i}^{(j)}$ linear voneinander unabhängig sind, können jeweils zwei von ihnen hinsichtlich ihrer Zeitabhängigkeit zu einem Fundamentalsystem für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hinsichtlich der Zeit zusammengefaßt werden, wobei z. B. für die Funktion $g_{k\,i}^{(j)}$ folgende drei Kombinationen möglich sind:

$$\left.\begin{array}{lllll} & g_{k\,1}^{(1)} & \text{mit} & g_{k\,2}^{(1)}\,, & g_{k\,1}^{(2)} \quad \text{mit} \quad g_{k\,2}^{(2)} \\ \text{oder} & g_{k\,1}^{(1)} & \text{mit} & g_{k\,1}^{(2)}\,, & g_{k\,2}^{(1)} \quad \text{mit} \quad g_{k\,2}^{(2)} \\ \text{oder} & g_{k\,1}^{(1)} & \text{mit} & g_{k\,2}^{(2)}\,, & g_{k\,2}^{(1)} \quad \text{mit} \quad g_{k\,1}^{(2)}\,. \end{array}\right\} \tag{60}$$

Jede der sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen, für welche diese Kombinationen ein Fundamentalsystem bilden, wäre in der weiter unten dargestellten Weise auf ihre Stabilität zu untersuchen. Dasselbe gilt auch für die $h_{k\,i}^{(j)}$. Die später durchgeführte Berechnung der Substitutions-Koeffizienten führt nun aber für sämtliche Funktionen mit ungleichen Indices j auf Widersprüche, so daß als zusammengehörige Grundfunktionen nur die mit gleichen Indices j behafteten — d. h. nur die jeweils ersten Kombinationen (60) — mit den zugehörigen Differentialgleichungen.

$$\ddot{g}_k^{(j)} + r_k^{(j)}\, g_k^{(j)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \ddot{h}_k^{(j)} + s_k^{(j)}\, h_k^{(j)} = 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{61}$$

in Frage kommen. Die Lösungen (58) werden dann

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k^{(1)} + g_k^{(2)}]\,, \qquad \vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} [h_k^{(1)} + h_k^{(2)}]\,.$$

Jedes Paar der Funktionen $g_{k\,i}^{(j)}$ und $h_{k\,i}^{(j)}$ ist jetzt für sich zu untersuchen. Bei Ersatz von τ durch $\tau + p$ mit $p = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ entstehen die Integrale $\bar{g}_{k\,i}^{(j)} \equiv g_{k\,i}^{(j)}(\tau + p)$ und $\bar{h}_{k\,i}^{(j)} \equiv h_{k\,i}^{(j)}(\tau + p)$, die sich bei Wahl der richtigen Substitutions-Koeffizienten durch die linearen Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l} \bar{g}_{k\,i}^{(j)} = \alpha_{i\,1,\,k}^{(j)}\, g_{k\,1}^{(j)} + \alpha_{i\,2,\,k}^{(j)}\, g_{k\,2}^{(j)}\,, \\ \bar{h}_{k\,i}^{(j)} = \beta_{i\,1,\,k}^{(j)}\, h_{k\,1}^{(j)} + \beta_{i\,2,\,k}^{(j)}\, h_{k\,2}^{(j)} \end{array}\right\} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{62}$$

aus den Fundamentalsystemen $g_{k\,i}^{(j)}$, $h_{k\,i}^{(j)}$ aufbauen lassen.

Die Lösungen von (61) sind periodisch zweiter Art

$$\bar{g}_k^{(j)} = m_k^{(j)}\, g_k^{(j)}\,, \qquad \bar{h}_k^{(j)} = n_k^{(j)}\, h_k^{(j)} \qquad (j = 1, 2)\,, \tag{63}$$

wobei die Zahlen $m_k^{(j)}$, $n_k^{(j)}$ aus den quadratischen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (m_k^{(j)})^2 - (\alpha_{1\,1,\,k}^{(j)} + \alpha_{2\,2,\,k}^{(j)})\, m_k^{(j)} + 1 = 0\,, \\ (n_k^{(j)})^2 - (\beta_{1\,1,\,k}^{(j)} + \beta_{2\,2,\,k}^{(j)})\, n_k^{(j)} + 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad (j = 1, 2)$$

folgen. Diese vereinfachen sich noch weiter, wenn wir fordern, daß eine der Partikularlösungen $g_{k\,i}^{(j)}$ eine gerade, die andere eine ungerade Funktion von τ ist:

$$g_{k\,1}^{(j)}(\tau) = g_{k\,1}^{(j)}(-\tau)\,, \qquad g_{k\,2}^{(j)}(\tau) = -\,g_{k\,2}^{(j)}(-\tau)\,, \tag{64}$$

und daß die Lösungen die Anfangsbedingungen

$$g_{k\,1}^{(j)}(0) = c_{1\,k}^{(j)}(\xi, \alpha)\,, \qquad g_{k\,2}^{(i)}(0) = 0\,, \qquad \dot{g}_{k\,1}^{(j)}(0) = 0\,, \qquad \dot{g}_{k\,2}^{(j)}(0) = c_{2\,k}^{(j)}(\xi, \alpha) \tag{65}$$

erfüllen. Dann ist

$$\alpha_{1\,1,\,k}^{(j)} = \alpha_{2\,2,\,k}^{(j)} \qquad (j = 1, 2)\,. \tag{66}$$

Beweis: Die Substitutions-Koeffizienten können durch Partikularlösungen für p ausgedrückt werden:

$$g_{k\,1}^{(j)}(p) = c_{1\,k}^{(j)}\, \alpha_{1\,1,\,k}^{j)}\,, \qquad g_{k\,2}^{(j)}(p) = c_{1\,k}^{(j)}\, \alpha_{2\,1,\,k}^{(j)}\,, \qquad \dot{g}_{k\,1}^{(j)}(p) = c_{2\,k}^{(j)}\, \alpha_{1\,2,\,k}^{(j)}\,, \qquad \dot{g}_{k\,2}^{(j)}(p) = c_{2\,k}^{(j)}\, \alpha_{2\,2,\,k}^{(j)}\,.$$

[1] Vgl. Fußnote 3 auf S. 137.

Aus (62) gewinnen wir

$$g_{k1}^{(j)}(\tau) = \begin{vmatrix} \bar{g}_{k1}^{(j)} & \alpha_{12,k}^{(j)} \\ \bar{g}_{k2}^{(j)} & \alpha_{22,k}^{(j)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{11,k}^{(j)} & \alpha_{12,k}^{(j)} \\ \alpha_{21,k}^{(j)} & \alpha_{22,k}^{(j)} \end{vmatrix} = \alpha_{22,k}^{(j)} g_{k1}^{(j)}(\tau + p) - \alpha_{12,k}^{(j)} g_{k2}^{(j)}(\tau + p) ,$$

wobei die im Nenner stehende Determinante gleich „eins" wird. Setzen wir hier $\tau = -p$, so wird mit (64) und (65)

$$g_{k1}^{(j)}(-p) = g_{k1}^{(j)}(p) = \alpha_{22,k}^{(j)} g_{k1}^{(j)}(0) = c_{1k}^{(j)} \alpha_{22,k}^{(j)} .$$

Andererseits ist aber

$$g_{k1}^{(j)}(p) = c_{1k}^{(j)} \alpha_{11,k}^{(j)} ,$$

womit die Behauptung (66) folgt. Die allgemeine Lösung

$$\bar{g}_k^{(j)} \equiv g_k^{(j)}(\tau + p) = m_k^{(j)} g_k^{(j)}(\tau) = e^{\mu_k^{(j)} p} g_k^{(j)}(\tau) = e^{\left(\varrho_k^{(j)} + \sigma_k^{(j)} i\right) p} g_k^{(j)}(\tau) \tag{67}$$

ist stabil, sofern der Realteil des charakteristischen Exponenten $\mu_k^{(j)}$ Null ist. Das **Kriterium für die Stabilität** der k-ten Lösung $g_k^{(j)}$ lautet dann

$$\left|\alpha_{11,k}^{(j)}\right| \leq 1 \qquad (j = 1, 2) . \tag{68}$$

Entsprechend folgt für die Stabilität der k-ten Lösung $h_k^{(j)}$

$$\left|\beta_{11,k}^{(j)}\right| \leq 1 \qquad (j = 1, 2) . \tag{68'}$$

Zur Bestimmung der Substitutions-Koeffizienten $\alpha_{11,k}^{(j)}$, $\beta_{11,k}^{(j)}$ werden die in (59) auftretenden Koordinaten-Funktionen nach den Eigenfunktionen $U_{0n}(\xi)$, $V_{0n}(\xi)$ der freien Schwingungen entwickelt, z. B. in der Form

$$U_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{(k)} U_{0n} , \qquad \bar{U}_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{2n}^{(k)} U_{0n} , \qquad V_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}^{(k)} V_{0n} , \text{ usw.} \tag{69}$$

$$\text{mit} \qquad a_{2n}^{(k)} = \begin{cases} \int_{\xi=0}^{1} U_{2k} U_{0n} \, d\xi & (n = k) \\ 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & (n \neq k) \end{cases} , \qquad \bar{a}_{2n}^{(k)} = \begin{cases} 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & (n = k) \\ \int_{\xi=0}^{1} \bar{U}_{2k} U_{0n} \, d\xi & (n \neq k) \end{cases} , \text{ usw.} \tag{70}$$

Mit diesen Entwicklungen können wir dann die Funktionen (59) als Reihen aus Produkten von Koordinaten- und Zeitfunktionen schreiben:

$$g_{ki}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{0n}(\xi) G_{ni}^{(j)}(\tau) , \qquad h_{ki}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{0n}(\xi) H_{ni}^{(j)}(\tau) \qquad (i, j = 1, 2) . \tag{71}$$

Bei Ersatz von τ durch $\tau + p$ entstehen nur neue Zeitfunktionen $\bar{G}_{ni}$, $\bar{H}_{ni}$, während die Koordinaten-Funktionen unverändert bleiben, d.h. dann können die Zeitfunktionen $\bar{g}_{ki}^{(j)}$ bzw. $\bar{h}_{ki}^{(j)}$ mittels der Substitution (62) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_{0n} \bar{G}_{ni}^{(j)} &= \alpha_{i1,k}^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} U_{0n} G_{n1}^{(j)} + \alpha_{i2,k}^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} U_{0n} G_{n2}^{(j)} , \\ \sum_{n=1}^{\infty} V_{0n} \bar{H}_{ni}^{(j)} &= \beta_{i1,k}^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} V_{0n} H_{n1}^{(j)} + \beta_{i2,k}^{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} V_{0n} H_{n2}^{(j)} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2)$$

mit den $g_{ki}^{(j)}$ bzw. $h_{ki}^{(j)}$ verbunden werden. Da die Koordinaten-Funktionen der freien Schwingungen linear voneinander unabhängig sind, können diese Gleichungen aber nur dann bestehen, wenn für jedes n

$$\left.\begin{aligned} \bar{G}_{ni}^{(j)} &= \alpha_{i1,k}^{(j)} G_{n1}^{(j)} + \alpha_{i2,k}^{(j)} G_{n2}^{(j)} , \\ \bar{H}_{ni}^{(j)} &= \beta_{i1,k}^{(j)} H_{n1}^{(j)} + \beta_{i2,k}^{(j)} H_{n2}^{(j)} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2) \tag{72}$$

gilt, wobei die Wahl von n freigestellt ist, da die Substitutions-Koeffizienten unabhängig von n sind. Wenn wir $n = k$ wählen, so erhalten wir die Funktionen $G_{ki}^{(j)}$ und $H_{ki}^{(j)}$ durch Gleichsetzen der einzelnen Gleichungen von (59) und (71) sowie Vergleich der bei U_{0k} bzw. V_{0k} stehenden

Funktionen mit Berücksichtigung der Entwicklungen (69). Die Substitutions-Koeffizienten ergeben sich, indem man zunächst in den $G_{k\,i}^{(j)}$ und $H_{k\,i}^{(j)}$ τ durch $\tau + p$ ersetzt und so $\overline{G}_{k\,i}^{(j)}$, $\overline{H}_{k\,i}^{(j)}$ bildet, sodann die so gefundenen Ausdrücke auf den linken Seiten von (72) für $n = k$ einsetzt und schließlich die bei gleichen Zeitfunktionen stehenden Funktionen gleich Null setzt.

Die Ausrechnung ergibt für die Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^2 die Stabilitätskriterien

$$\left.\begin{aligned} |\alpha_{1\,1,\,k}^{(1)}| &= |\cos\omega_{b\,k}\,p + \varepsilon_1^2\,p\,a_{2\,k}^{(k)}\sin\omega_{b\,k}\,p| \leq 1\,, \qquad |\alpha_{1\,1,\,k}^{(2)}| = |\cos\omega_{d\,k}\,p| \leq 1\,, \\ |\beta_{1\,1,\,k}^{(1)}| &= |\cos\omega_{d\,k}\,p + \varepsilon_1^2\,p\,b_{2\,k}^{(k)}\sin\omega_{d\,k}\,p| \leq 1\,, \qquad |\beta_{1\,1,\,k}^{(2)}| = |\cos\omega_{b\,k}\,p| \leq 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Für $j = 1$ kann aus (73) direkt der Verlauf der Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten in einer (ε_1, α)-Ebene angegeben werden durch die beiden Gleichungen

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pm 1 - \cos\omega_{b\,k}\,p}{p\,a_{2\,k}^{(k)}\sin\omega_{b\,k}\,p}}\,, \qquad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pm 1 - \cos\omega_{d\,k}\,p}{p\,b_{2\,k}^{(k)}\sin\omega_{d\,k}\,p}}\,, \tag{74}$$

wobei das bei „1" stehende Vorzeichen so zu wählen ist, daß ε_1 reell wird; außerdem sind auch nur positive Werte der Wurzel physikalisch sinnvoll.

Für $j = 2$ sind die Stabilitätskriterien für alle Frequenzen erfüllt. Es kommt daher für die Stabilitätsuntersuchung auf das Gleiche heraus, wenn man von vornherein alle Lösungsanteile mit $j = 2$ in den Lösungen (58) fortläßt und entsprechend Gleichung (41) folgende Anfangsbedingungen vorschreibt:

a) Für die Lösung η braucht nur eine Anfangsstörung hinsichtlich η zu erfolgen, d.h. es kann $C_k = D_k = 0$ gesetzt werden.

b) Für die Lösung ϑ braucht nur eine Anfangsstörung hinsichtlich ϑ zu erfolgen, d.h. es kann $A_k = B_k = 0$ gesetzt werden.

b) Ermittlung der kritischen Erregerfrequenzen. Wenn man nur die kritischen Frequenzen und nicht den Verlauf der Grenzkurven der Instabilitätsgebiete ermitteln will, braucht man die für die zweite Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^2 einschließlich maßgebenden Koeffizienten $a_{2\,k}^{(k)}$ und $b_{2\,k}^{(k)}$ nicht vollständig auszurechnen, sondern kann die kritischen Frequenzen sofort angeben:

Da die Instabilitätsgebiete in einer (ε_1, α)-Ebene von den Punkten $\varepsilon_1 = 0$ ihren Ausgang nehmen, tritt Instabilität nach (74) dann auf, wenn $\omega_{b\,k}\,p = r\pi$ bzw. $\omega_{d\,k}\,p = r\pi$ $(r = 1, 2, 3\ldots)$ ist, bzw. wenn mit $p = 2\pi/\alpha$ die Erregerfrequenzen die kritischen Werte $\alpha = 2\,\omega_{b\,k}/r$, $2\,\omega_{d\,k}/r$ annehmen.

Zusätzlich zu diesen Instabilitätsgebieten „erster Art" können aber noch weitere Gebiete „zweiter Art" auftreten, die ihren Ausgang von denjenigen Erregerfrequenzen nehmen, für die die Entwicklungs-Koeffizienten $a_{2\,k}^{(k)}$ und $b_{2\,k}^{(k)}$ bzw. nach (70) die Funktionen $U_{2\,k}(\xi, \alpha)$ und $V_{2\,k}(\xi, \alpha)$ gegen unendlich gehen. Diese kritischen Frequenzen sind aber bereits durch (50), (51) und (56) angegeben. Es läßt sich ferner zeigen, daß bei Ausführung der Quadraturen (70) keine zusätzlichen kritischen Frequenzen hinzutreten.

Zusammenfassend sollen noch einmal sämtliche in zweiter Näherung ermittelten kritischen Erregerfrequenzen α aufgeschrieben werden, von denen im allgemeinen Einspannungsfall Instabilitätsgebiete ausgehen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{1. Art:} \quad \alpha = \frac{2\,\omega_{b\,k}}{r}\,, \quad \frac{2\,\omega_{d\,k}}{r} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)\,; \\ &\text{2. Art:} \quad \alpha = |\omega_{d\,k} \mp \omega_{b\,m}|\,, \quad |\omega_{d\,k} \mp \nu_k^2\,\varkappa_1|\,, \quad |\omega_{d\,k} \mp \bar{\nu}_k^2\,\varkappa_1|\,, \\ &\qquad\qquad \left|\omega_{b\,k} \mp \lambda_k\sqrt{\frac{1}{4}\lambda_k^2 \mp \varkappa_2^2}\right|\,, \quad |\omega_{b\,k} \mp 4\,\varkappa_1\,\varkappa_2^2|\,. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

8. Anwendungsbeispiele mit zahlenmäßiger Durchrechnung für konkrete Einzelfälle. a) Der durch gleiche Endmomente belastete frei aufliegende Träger. Die Rechnung soll auf Frequenzbereiche beschränkt bleiben, für die $(\omega/\omega_{1\,y})^2 \ll 1$ ist. Die Gleichungen (27) geben die Lösungen des ungestörten Problems an mit den normierten Eigenfunktionen

$$U_{0\,k}(\xi) = V_{0\,k}(\xi) = \sqrt{2}\sin k\pi\,\xi\,.$$

Die Eigenfrequenzen der freien Schwingungen sind nach (32)

$$\omega_{bk} = (k\pi)^2 \varkappa_1 , \qquad \omega_{dk} = \frac{k\pi}{2}\sqrt{(k\pi)^2 + 4\varkappa_2^2} .$$

Für die in (54) auftretenden Koordinaten-Funktionen erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} U_{\mp 1,1k} &= u_{\mp 1,1k} \sin k\pi\xi , & V_{\mp 1,1k} &= v_{\mp 1,1k} \sin k\pi\xi , \\ U_{2k} &= u_{2k} \sin k\pi\xi , & V_{2k} &= v_{2k} \sin k\pi\xi \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} u_{\mp 1,1k} &= \frac{\mu_1}{\sqrt{2}} \frac{(k\pi)^2}{\omega_{bk}^2 - (\omega_{dk} \mp \alpha)^2} , & v_{\mp 1,1k} &= \frac{\mu_2}{\sqrt{2}} \frac{(k\pi)^2}{\omega_{dk}^2 - (\omega_{bk} \mp \alpha)^2} , \\ u_{2k} &= \frac{\mu_1 (k\pi)^2}{4\omega_{bk}} (v_{-1,1k} + v_{+1,1k}) , & v_{2k} &= \frac{\mu_2 (k\pi)^2}{4\omega_{dk}} (u_{-1,1k} + u_{+1,1k}) . \end{aligned}\right\} \tag{76'}$$

Die einfache Gestalt der Eigenfunktionen soll dazu ausgenutzt werden, um bis zu Störungsgliedern mit ε_1^4 einschließlich zu rechnen. Man erhält nach längerer Rechnung, wenn nur die für die Rechnung bis zu Gliedern mit ε_1^4 wesentlichen Anteile aufgeschrieben werden,

$$\left.\begin{aligned} \eta_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} [\sin k\pi\xi \cdot u_{4k}\tau (A_k \sin \omega_{bk}\tau - B_k \cos \omega_{bk}\tau)] , \\ \vartheta_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} [\sin k\pi\xi \cdot v_{4k}\tau (C_k \sin \omega_{dk}\tau - D_k \cos \omega_{dk}\tau)] \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

mit den aus (76′) rekurrent zu bestimmenden Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} u_{4k} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\,\omega_{bk}} \left\{ \varkappa_1^2 \left[-\sqrt{2}\, u_{2k} (v_{-1,1k}^2 + v_{+1,1k}^2) + \frac{\mu_1 \mu_2 (k\pi)^4}{16\alpha} \left(\frac{v_{-1,1k}^2}{\omega_{bk} - \alpha} - \frac{v_{+1,1k}^2}{\omega_{bk} + \alpha} \right) \right] + u_{2k}^2 \right\} , \\ v_{4k} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\,\omega_{dk}} \left\{ \frac{1}{\varkappa_1^2} \left[-\sqrt{2}\, v_{2k} (u_{-1,1k}^2 + u_{+1,1k}^2) + \frac{\mu_1 \mu_2 (k\pi)^4}{16\alpha} \left(\frac{u_{-1,1k}^2}{\omega_{dk} - \alpha} - \frac{u_{+1,1k}^2}{\omega_{dk} + \alpha} \right) \right] + v_{2k}^2 \right\} . \end{aligned}\right\} \tag{77'}$$

Wir verfahren hier, wie am Schluß von Abschnitt 7a) angedeutet wurde, indem wir

a) für die Lösung η die Koeffizienten $C_k = D_k = 0$

und b) für die Lösung ϑ die Koeffizienten $A_k = B_k = 0$

setzen. (Man kann auch für die Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^4 einschließlich zeigen, daß damit alle Instabilitätsgebiete erfaßt werden.) Dann wird im Fall a)

$$\left.\begin{aligned} \eta = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \sin k\pi\xi \, [\sqrt{2}\, \varphi_{0k} + \varepsilon_1^2 u_{2k}\tau (A_k \sin \omega_{bk}\tau - B_k \cos \omega_{bk}\tau) + \\ + \varepsilon_1^4 u_{4k}\tau (A_k \sin \omega_{bk}\tau - B_k \cos \omega_{bk}\tau)] \} + O(\varepsilon_1^6) . \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Ordnen wir diese Lösungen entsprechend (58) um, so wird

$$\left.\begin{aligned} g_{k1}^{(1)}(\xi, \tau) &= \sin k\pi\xi \, [\sqrt{2} \cos \omega_{bk}\tau + (\varepsilon_1^2 u_{2k} + \varepsilon_1^4 u_{4k})\, \tau \sin \omega_{bk}\tau] + O(\varepsilon_1^6) , \\ g_{k2}^{(1)}(\xi, \tau) &= \sin k\pi\xi \, [\sqrt{2} \sin \omega_{bk}\tau - (\varepsilon_1^2 u_{2k} + \varepsilon_1^4 u_{4k})\, \tau \cos \omega_{bk}\tau] + O(\varepsilon_1^6) . \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Eine Entwicklung der in den Lösungen auftretenden Funktionen nach Eigenfunktionen der freien Schwingungen erübrigt sich hier, da die Randbedingungen bereits die Zusammenfassung der in den Lösungen allein auftretenden Funktionen $\sin k\pi\xi$ mit verschiedenen Koeffizienten gestatten. Nach Bildung von $\bar{g}_{ki}^{(1)}$ können wir daher jetzt direkt die Substitutionen (62) anwenden und erhalten so durch Nullsetzen der bei zweckmäßig gewählten Zeitfunktionen stehenden Ausdrücke die folgenden Stabilitätskriterien:

$$|\alpha_{11,k}^{(1)}| = \left| \cos \omega_{bk} p \left(1 - \varepsilon_1^4 p^2 \frac{u_{2k}^2}{4} \right) + \varepsilon_1^2 \frac{p}{\sqrt{2}} \sin \omega_{bk} p \, (u_{2k} + \varepsilon_1^2 u_{4k}) \right| \leq 1 . \tag{80}$$

Im Fall b) ergibt sich entsprechend

$$|\beta_{11,k}^{(1)}| = \left| \cos \omega_{dk} p \left(1 - \varepsilon_1^4 p^2 \frac{v_{2k}^2}{4} \right) + \varepsilon_1^2 \frac{p}{\sqrt{2}} \sin \omega_{dk} p \, (v_{2k} + \varepsilon_1^2 v_{4k}) \right| \leq 1 . \tag{80'}$$

Für eine Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^2 ergeben sich die Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten aus

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{(\pm 1 - \cos \omega_{bk} p)\sqrt{2}}{p\, u_{2k} \sin \omega_{bk} p}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{(\pm 1 \mp \cos \omega_{dk} p)\sqrt{2}}{p\, v_{2k} \sin \omega_{dk} p}} \,. \tag{81}$$

Da der Fall der freien Auflagerung nach Abschnitt 6c) eine Sonderstellung einnimmt, kommen hier nicht alle der in (75) für den allgemeinen Einspannungsfall aufgeschriebenen kritischen Frequenzen vor; insbesondere fallen die Frequenzen $|\omega_{dk} \mp \omega_{bm}|$ mit $(m \neq k)$ fort, während die übrigen in $|\omega_{bk} \mp \omega_{dk}|$ übergehen: Als kritische Frequenz haben wir also nur

$$\alpha = \frac{2\,\omega_{bk}}{r}\,, \qquad \frac{2\,\omega_{dk}}{r} \quad (r = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad \alpha = |\omega_{bk} \pm \omega_{dk}|. \tag{82}$$

Die letzten Frequenzen folgen auch direkt aus den Unendlichkeitsstellen der Koeffizienten (76′) und (77′). Man erkennt, daß bei der Näherung bis ε_1^4 keine neuen kritischen Frequenzen hinzutreten. Treiben wir die Näherung noch weiter, so kommen weitere Instabilitätsgebiete hinzu, die von den Frequenzen $\alpha = \frac{1}{r}|\omega_{bk} \mp \omega_{dk}|$ $(r = 2, 3, \ldots)$ ausgehen. Diese werden jedoch sicherlich von untergeordneter Bedeutung sein.

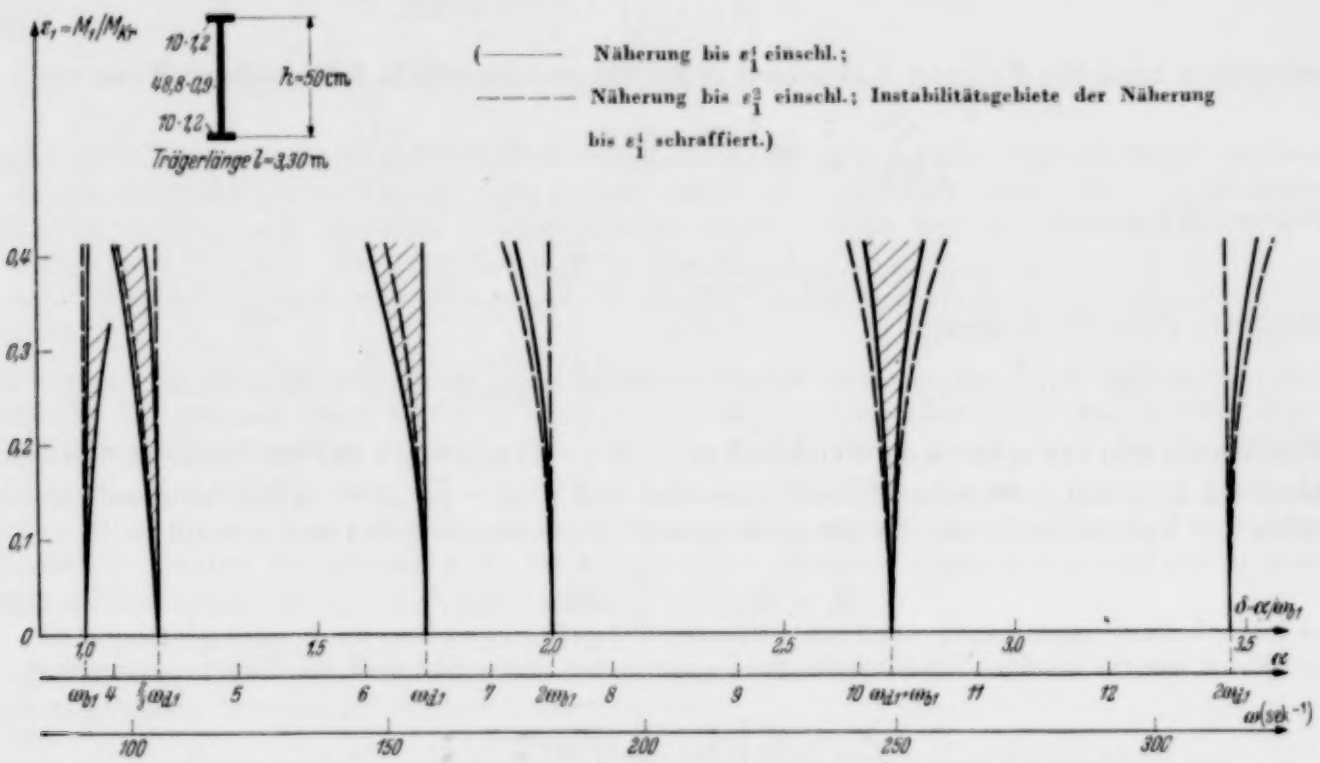

Abb. 5. 1. Beispiel: Frei aufliegender I-Träger mit Momenten $M \cos \omega t$. Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten.

Als Anwendungsbeispiel wählen wir einen Träger, der bereits von verschiedenen Verfassern in ihren Beispielen benutzt wurde[1]. Der Trägerquerschnitt ist in Abb. 5 dargestellt. Die Trägerlänge betrage $l = 3{,}30$ m. Die Querschnittswerte sind:

$$B_z = 5350\ \mathrm{tm^2}, \quad B_y = 57\ \mathrm{tm^2}, \quad i_p^2 = 363\ \mathrm{cm^2}, \quad C = 2{,}38\ \mathrm{tm^2}.$$

Ferner ist

$$l/h = 6{,}6, \quad \varrho = 0{,}00563\ \mathrm{tsec^2 m^{-2}}, \quad M_{kr} = 17\ \mathrm{tm}\,.$$

Damit werden die dimensionslosen Trägerkonstanten

$$\varkappa_1 = 0{,}381, \quad \varkappa_2 = 1{,}349, \quad \mu_2 = 6{,}50, \quad \mu_1 = 0{,}943\,.$$

Für die Frequenzen gilt die Umrechnung $\alpha = 0{,}04125\,\omega$. Die Rechnung soll für $k = 1$ durchgeführt werden. Die dimensionslosen Eigenfrequenzen der freien Schwingungen sind: $\omega_{b1} = 3{,}76$ und $\omega_{d1} = 6{,}5$. Für den vorliegenden konkreten Fall ergeben die Abschätzungen von Abschnitt 4b), daß die Näherung $M_z \approx M_1 = \text{const}$ für den untersuchten Frequenzbereich ausreicht.

[1] Vgl. Fußnote 2 auf S. 137.

Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 5 dargestellt; die Erregerfrequenzen α sind dabei auf die erste Biegeeigenfrequenz ω_{b1} mittels $\delta = \alpha/\omega_{b1}$ bezogen. Für $\delta > 3{,}46$ gibt es kein Instabilitätsgebiet mehr, während sich für $0 < \delta < 1$ die Instabilitätsgebiete häufen; dabei werden diese Gebiete aber immer schmaler, so daß Abb. 5 die wesentlichen Instabilitätsgebiete erfaßt. Die ausgezogenen Kurven gelten für die Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^4, die gestrichelten für die Näherung bis ε_1^2. Für kleinere ε_1 (etwa $\varepsilon_1 < 0{,}2$) stimmen die Kurven für beide Näherungen gut überein. Bemerkenswert sind die Frequenzbereiche bei $\alpha = 2\omega_{b1}$ und $\alpha = 2\omega_{d1}$: Während die Näherung bis ε_1^2 an diesen Stellen ausgeprägte Instabilitätsgebiete ergibt, reduzieren sich diese bei der Näherung bis ε_1^4 auf ganz schmale Gebiete, die praktisch durch eine einzige Kurve dargestellt werden können.

b) Der durch Endmomente belastete, am linken Ende frei aufliegende, am rechten Ende vollständig eingespannte flanschlose Träger. Jetzt wollen wir nur noch $(\omega/\omega_{3y})^2 \ll 1$ voraussetzen und die Näherungsmethoden von Abschnitt 5 anwenden, indem wir das gemäß (16) von x und der Erregerfrequenz ω abhängige Schnittmoment $M_z = -B_z v''$ in geeigneter Weise durch ein nur noch von ω abhängiges Moment ersetzen.

Im vorliegenden Falle haben wir als Grundschwingung

$$v(x,t) = \frac{4\,l^2}{B_z\,\pi^3}\,M_1 \cos\omega t \left[\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{1y}}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{l} + \sum_{k=3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]$$

und wollen zunächst die unter 5 skizzierte erste Näherungsmethode heranziehen: Wenn wir

$$\sum_{k=3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{\pi^3 x}{8\,l^2}(l-x) - \sin\frac{\pi l}{x}$$

und zur Abkürzung

$$\frac{1}{1-(\omega/\omega_{1y})^2} = B(\omega)$$

einführen, geht $v(x,t)$ über in

$$v(x,t) = \frac{4\,l^2}{B_z\,\pi^3}\,M_1 \cos\omega t\left[\left(B(\omega)-1\right)\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{\pi^3 x}{8\,l^2}(l-x)\right] = v_d(x)\cos\omega t\,.$$

Ersetzen wir nun $v(x,t)$ durch die Durchsenkung $\bar{v}(x,t) = \bar{v}_d(x)\cos\omega t$ mit der Maßgabe, daß $\bar{v}_d(x)$ durch ein konstantes Moment $\overline{M}_1$ hervorgerufen und $\bar{v}_{d\,max} = v_{d\,max} = v_d(l/2)$ sein soll, so erhalten wir das nur noch von der Erregerfrequenz ω abhängige Näherungsmoment

$$\overline{M}_1 = M_1\left[1 + \frac{32}{\pi^3}\left(B(\omega)-1\right)\right]. \tag{83}$$

Wenn wir die zweite Näherungsmethode anwenden, so ergibt sich als Näherungsmoment

$$\overline{M}_1 = M_1\sqrt{1 + \frac{8}{\pi^2}\left[B^2(\omega)-1\right]}\,. \tag{83'}$$

Schreiben wir ohne Rücksicht darauf, welche dieser Näherungen wir anwenden wollen

$$\overline{M}_1 = C(\omega)\,M_1,$$

so können wir alle früheren Rechnungen beibehalten und müssen nur am Schluß der Rechnungen in den Gleichungen für die Stabilitäts-Kriterium gemäß (20) ε_1 durch $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 C(\omega)$ ersetzen.

Für den flanschlosen Träger vereinfacht sich die zweite Gleichung (22) durch Fortfall des Gliedes $\frac{1}{4}\,\vartheta^{IV}$.

Die Randbedingungen lauten mit $1/C_1 = C_2 = 0$ nach (23) $\eta(0) = \eta(1) = \eta''(0) = \eta'(1) = 0$. Die normierten Eigenfunktionen der freien Biegeschwingungen sind

$$U_{0k}(\xi) = \frac{2\,\lambda_k\left(\mathfrak{Sin}\,\lambda_k \sin\lambda_k\,\xi - \sin\lambda_k\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_k\,\xi\right)}{\sqrt{\lambda_k\left[\sin^2\lambda_k\left(\mathfrak{Sin}\,2\lambda_k - 2\lambda_k\right) - \mathfrak{Sin}^2\lambda_k\left(\sin 2\lambda_k - 2\lambda_k\right)\right]}}\,. \tag{84}$$

Die erste Frequenzgleichung (33) vereinfacht sich zu $\mathfrak{B}(\lambda_k) = 0$ mit den Wurzeln $\lambda_k = 3{,}9265, \ldots$ In der Differentialgleichung (29) für die V_{0k} fällt wegen der verkürzten Ausgangsdifferentialgleichung — Fehlen des Gliedes $1/4\,\vartheta_0^{IV}$ — das erste Glied fort, so daß die normierten Eigenfunktionen der freien Torsionsschwingungen

$$V_{0k}(\xi) = \sqrt{2}\,\sin\bar{\nu}_k\,\xi \tag{85}$$

lauten. Die dimensionslosen Eigenfrequenzen der freien Schwingungen sind

$$\omega_{b\,k} = \lambda_k^2 \varkappa_1 , \qquad \omega_{d\,k} = \bar{\nu}_k \varkappa_2 = k \pi \varkappa_2 . \tag{86}$$

Damit ist das „ungestörte" Problem gelöst. Das in Abschnitt 6c) dargestellte Berechnungsverfahren liefert uns dann die Koordinaten-Funktionen $U_{2k}(\xi, \alpha)$ und $V_{2k}(\xi, \alpha)$ sowie schließlich nach längerer Rechnung durch Ausführung der Quadraturen (70) die für eine Näherung bis zu Gliedern mit ε_1^2 einschließlich interessierenden Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} a_{2k}^{(k)} &= \frac{\omega_{b\,k}\,\mu_2^2}{\varkappa_2^2} \Big\{ K_1(\lambda_k) \left[\sigma_{-k}^4 \tau_{-k}^2 \left(K_2(\lambda_k) + K_3(\lambda_k)\, \sigma_{-k} \operatorname{ctg} \sigma_{-k} \right) + \right. \\ &\qquad \left. + \sigma_{+k}^4 \tau_{+k}^2 \left(K_2(\lambda_k) + K_3(\lambda_k)\, \sigma_{+k} \operatorname{ctg} \sigma_{+k} \right) \right] + \\ &\quad + K_4(\lambda_k) \left[\frac{1}{\lambda_k^2 + \sigma_{-k}^2} + \frac{1}{\lambda_k^2 + \sigma_{+k}^2} + K_5(\lambda_k) \left(\frac{1}{\lambda_k^2 - \sigma_{-k}^2} + \frac{1}{\lambda_k^2 - \sigma_{+k}^2} \right) \right] \Big\} , \\ b_{2k}^{(k)} &= - \frac{\mu_1 \mu_2 \bar{\nu}_k^2 \omega_{d\,k}}{4 \varkappa_2^2} \Big\{ \frac{1}{\left| \varkappa_1^2 \bar{\nu}_k^4 - (\omega_{d\,k} - \alpha)^2 \right|} \left[\frac{\bar{\nu}_k^2\, \Im(\varrho_{-k})\, \varrho_{-k}}{\mathfrak{B}(\varrho_{-k}) \left(\bar{\nu}_k^4 - \varrho_{-k}^4 \right)} - \frac{1}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\left| \varkappa_1^2 \bar{\nu}_k^4 - (\omega_{d\,k} + \alpha)^2 \right|} \left[\frac{\bar{\nu}_k^2\, \Im(\varrho_{+k})\, \varrho_{+k}}{\mathfrak{B}(\varrho_{+k}) \left(\bar{\nu}_k^4 - \varrho_{+k}^4 \right)} - \frac{1}{2} \right] \Big\} \end{aligned}\right| \tag{87}$$

mit

$$\varrho_{\mp k}^2 = \frac{|\omega_{d\,k} \mp \alpha|}{\varkappa_1} , \qquad \sigma_{\mp k} = \frac{|\omega_{d\,k} \mp \alpha|}{\varkappa_2} , \qquad \tau_{\mp k} = \frac{1}{\lambda_k^4 - \sigma_{\mp k}^4} . \tag{87'}$$

Dabei sind $K_1(\lambda_k)$ usw. endliche Ausdrücke, die ihrer Länge wegen nicht aufgeschrieben wurden, während die Funktionen $\mathfrak{B}(\varrho_{+k})$, $\Im(\varrho_{+k})$ usw. durch (33′) definiert sind. Die Grenzkurven zwischen stabilen und instabilen Lösungsgebieten können damit aus (74) errechnet werden.

Die früher allgemein ermittelten kritischen Erregerfrequenzen „zweiter Art" — vgl. Gl. (75) — lassen sich für das spezielle Beispiel auch direkt aus den Unendlichkeitsstellen der Koeffizienten (87) entnehmen: Die $a_{2k}^{(k)}$ gehen für $\operatorname{ctg} \sigma_{\mp k} \to \infty$, also für $\sigma_{\mp k} = \pm m \pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ gegen unendlich, was $\alpha = |\omega_{b\,k} \mp m \pi \varkappa_2|$ zur Folge hat. Wegen $m \pi \varkappa_2 = \omega_{d\,m}$ nach (86) treten also kritische Erregerfrequenzen $\alpha = |\omega_{b\,k} \mp \omega_{d\,m}|$ auf, wie sie auch früher angegeben wurden. Dieselben Frequenzen ergeben sich auch für $\mathfrak{B}(\varrho_{\mp k}) = 0$, d.h. für $\varrho_{\mp k} = \lambda_m$ aus den Unendlichkeitsstellen der Koeffizienten $b_{2k}^{(k)}$. Außerdem haben die Koeffizienten noch weitere Unendlichkeitsstellen, die zu den entsprechenden übrigen in (75) angegebenen kritischen Frequenzen führen; die letzten Frequenzen von (75) kommen hier übrigens wegen der vereinfachten Ausgangsdifferentialgleichung für ϑ nicht vor.

Es wird folgendes Anwendungsbeispiel gewählt: Als freie Trägerlänge wird $l = 1{,}0$ m angenommen. Für einen Trägerquerschnitt von der Höhe $h = 10$ cm und der Breite $b = 1$ cm gelten folgende Querschnittswerte:

$$B_z = 17{,}5 \text{ tm}^2, \quad B_y = 0{,}175 \text{ tm}^2, \quad i_p^2 = 8{,}42 \text{ cm}^2, \quad C = 0{,}2535 \text{ tm}^2.$$

Ferner ist $\varrho = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ tsec^{2}m^{-2} und $M_{kr} = 0{,}946$ tm. Damit werden die dimensionslosen Trägerkonstanten

$$\varkappa_1 = 0{,}2901, \quad \varkappa_2 = 12{,}04, \quad \mu_1 = 4{,}553, \quad \mu_2 = 54{,}1 .$$

Für die Frequenzen gilt die Umrechnung $\alpha = 0{,}0196\, \omega$. Auch hier soll die Rechnung für $k = 1$ durchgeführt werden. Die dimensionslosen Eigenfrequenzen der freien Schwingungen betragen mit $\lambda_1 = 3{,}9265$ nach (86) $\omega_{b\,1} = 4{,}48$, $\omega_{d\,1} = 37{,}80$. Die Abschätzungen von Abschnitt 4b) ergeben hier, daß erst die Quotienten $(\omega/\omega_{3\,y})^2$ gegenüber „eins" vernachlässigt werden dürfen. Wir wollen uns der Näherungsgleichung (83′) bedienen, um den Einfluß des von ω abhängigen Biegemomentes zu berücksichtigen.

Nach Berechnung von $a_{21}^{(1)}$ und $b_{21}^{(1)}$ erhalten wir die in Abb. 6 dargestellten Instabilitätsgebiete in der (ε_1, α)-Ebene. Es zeigt sich, daß die von den Frequenzen $|\omega_{b\,1} \mp \varkappa_2 \lambda_1|$ und $|\omega_{d\,1} \mp \varkappa_1 \bar{\nu}_1^2|$ ausgehenden Bereiche so schmal sind, daß sie durch eine einzige zur ε_1-Achse parallele Gerade dargestellt werden können und daher praktisch nicht von Bedeutung sind.

Für die gleichen Trägerabmessungen wurde die Rechnung zum Vergleich auch für den frei aufgelagerten Fall durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 dargestellt, wo die beiden Auflagerungsfälle miteinander verglichen sind, indem die Grenzkurven der Instabilitätsgebiete für ein bestimmtes Gebiet jeweils über dem Verhältnis der Erregerfrequenz α zu derjenigen Frequenz

aufgetragen sind, von welcher das betreffende Gebiet seinen Ausgang nimmt. Die Instabilitätsgebiete für beide Auflagerungsfälle stimmen dann recht gut miteinander überein. Für eine Abschätzung wird man wohl unbedenklich von dieser Tatsache Gebrauch machen können: Man

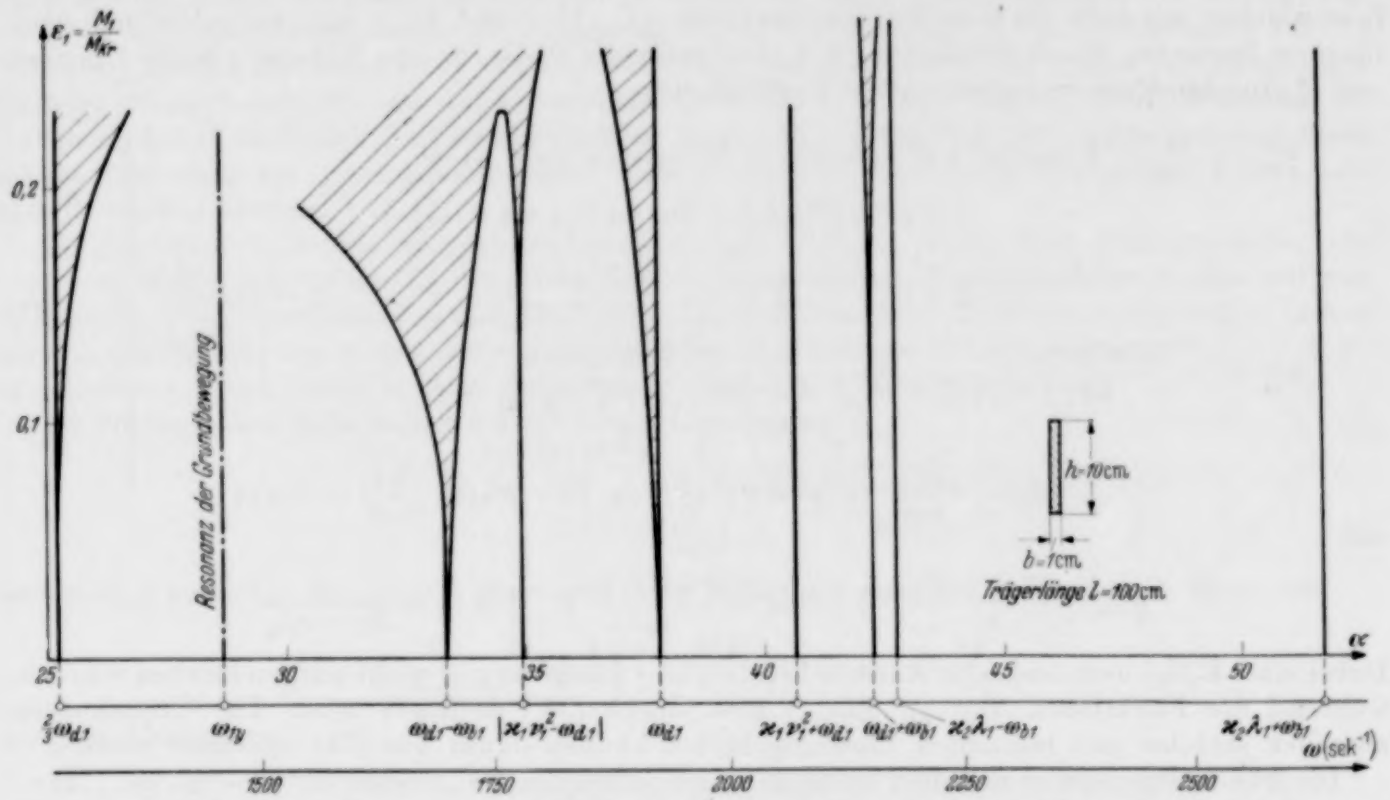

Abb. 6. 2. Beispiel: Links frei aufliegender, rechts eingespannter Träger, belastet durch Momente $M_1 \cos \omega t$. (Instabilitätsgebiete schraffiert.)

braucht dann nur die ω_{bk} bzw. ω_{dk} für eine beliebige Einspannungsart zu berechnen und die Instabilitätsbereiche vom frei aufliegenden Träger zu übernehmen. Allerdings gilt dieser Vergleich nur für diejenigen Instabilitätsgebiete, die von den in (75) angegebenen kritischen Frequenzen „erster Art" sowie von $|\omega_{dk} \mp \omega_{bk}|$ ihren Ausgang nehmen; das sind aber auch die wesentlichsten Bereiche.

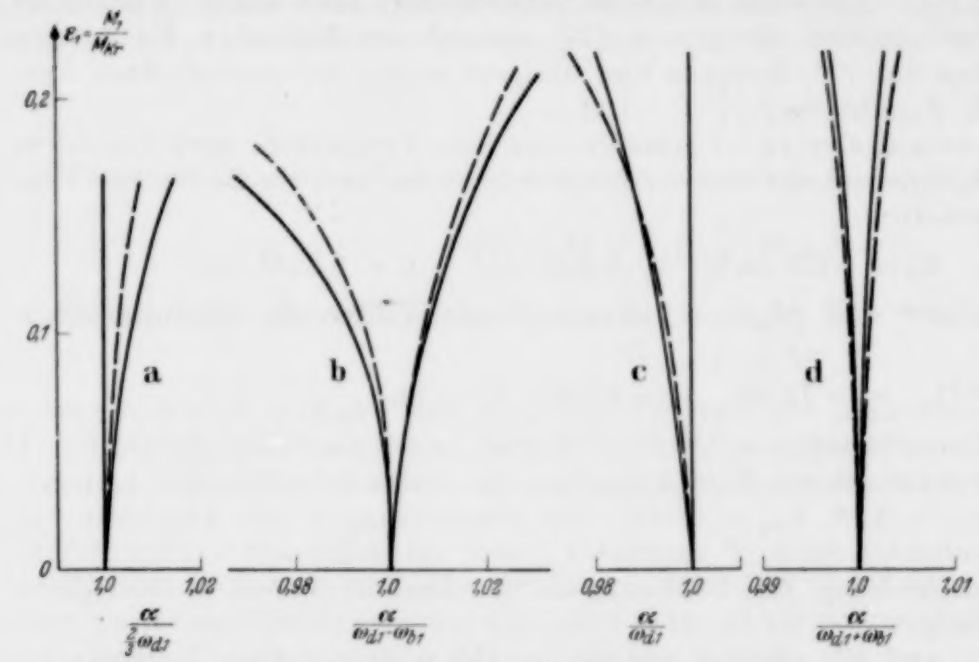

Abb. 7. Vergleich zwischen einigen Instabilitätsgebieten des eingespannten und frei aufliegenden Trägers vom 2. Beispiel.
——— Links freie Auflagerung, rechts Einspannung.
– – – – – Beiderseits freie Auflagerung.

c) Der nur durch Axialkräfte belastete frei aufliegende Träger. Gleichung (12) ist jetzt die grundlegende Differentialgleichung, in der wir der Einfachheit halber

$$P(t) = P_1 \cos \omega t$$

annehmen. Sie geht dann mit

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \qquad \eta = \frac{w}{h}, \\ \tau &= \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{B_y}{\varrho}}\, t, \\ \varepsilon &= \frac{P_1}{P_{kr}} = \frac{P_1 l^2}{k^2 \pi^2 B_y} \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

über in

$$\ddot{\eta} + \eta^{\mathrm{IV}} + \varepsilon (k\pi)^2 \cos \alpha \tau \cdot \eta'' = 0 \tag{89}$$

mit den Randbedingungen

$$\eta(0) = \eta(1) = \eta''(0) = \eta''(1) = 0.$$

Wir nehmen wieder einen Störungsansatz

$$\eta(\xi,\tau) = \eta_0(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\xi,\tau)\varepsilon^n , \tag{90}$$

mit dem sich die n Differentialgleichungen

$$\ddot{\eta}_n + \eta_n^{\mathrm{IV}} = -(k\pi)^2 \cos\alpha\tau \cdot \eta''_{n-1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{91}$$

ergeben, in denen wiederum die rechten Seiten als Lösungen der jeweils vorhergehenden Gleichung für $n-1$ bekannt sind. (In der ersten — ungestörten — Gleichung für $n=0$ ist die rechte Seite Null.) Wir wollen die Näherung bis zu Gliedern mit ε^2 einschließlich führen. Die Rechnung geht ganz analog wie beim Kipproblem vor sich, und wir erhalten als Lösung des ungestörten Problems

$$\eta_0(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{0k}(\xi)\, q_{0k}(\tau) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\sin k\pi\xi\,(A_k \cos\omega_k\tau + B_k \sin\omega_k\tau)] \tag{92}$$

mit $\omega_k = (k\pi)^2 =$ Eigenfrequenz der Biegeschwingung.

$U_{0k}(\xi) = \sqrt{2}\sin k\pi\xi$ sind die normierten Eigenfunktionen der Biegeschwingung. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung (91) für $n=1$ folgt

$$\ddot{\eta}_1 + \eta_1^{\mathrm{IV}} = \frac{\pi^4}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty}{}' [k^4 \sin k\pi\xi\,(q_{-1,k} + q_{+1,k})] .$$

Der Lösungsansatz

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} [U_{-1,1k}\, q_{-1,k} + U_{+1,1k}\, q_{+1,k}]$$

führt zu

$$U_{\mp 1,1k} = u_{\mp 1,1k} \sin k\pi\xi$$

mit

$$u_{-1,1k} = \frac{\omega_k^2}{\alpha\sqrt{2}\,(2\omega_k - \alpha)} , \qquad u_{+1,1k} = -\frac{\omega_k^2}{\alpha\sqrt{2}\,(2\omega_k + \alpha)} .$$

Aus der dritten Gleichung von (91) für $n=2$ folgt mit den für die Näherung bis ε^2 wesentlichen Gliedern aus dem Lösungsansatz

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} [U_{2k}\,\tau\,(A_k \sin\omega_k\tau - B_k \cos\omega_k\tau)]$$

für die Koordinaten-Funktionen

$$U_{2k} = u_{2k} \sin k\pi\xi \qquad \text{mit} \qquad u_{2k} = -\frac{\omega_k^2}{2\sqrt{2}\,\alpha\,(4\omega_k^2 - \alpha^2)} , \tag{93}$$

sodaß sich als Gesamtlösung bis zu Gliedern mit ε^2

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \{\sin k\pi\xi\,[\sqrt{2}\,q_{0k} + \varepsilon_1(u_{-1,1k}\,q_{-1,k} + u_{+1,1k}\,q_{+1,k}) + \varepsilon_1^2\,u_{2k}\,\tau\,(A_k \sin\omega_k\tau - B_k\cos\omega_k\tau)]\} \tag{94}$$

ergibt. Ordnen wir diese wieder entsprechend (58) um, d. h. setzen wir

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k\, g_{k1} + B_k\, g_{k2}] ,$$

so können wir die Stabilitätsuntersuchung genau so wie beim Kipproblem durchführen: Wir bilden die Funktionen $\bar{g}_{ki}$, die sich durch eine Substitution entsprechend (62) mit geeigneten $\alpha_{ij,k}$ aus den g_{ki} aufbauen lassen. Durch Vergleich der Zeitfunktionen $\cos\omega_k\tau$ finden wir für die Substitutions-Koeffizienten $\alpha_{11,k}$ und damit das Stabilitätskriterium

$$|\alpha_{11,k}| = \left| \cos\omega_k p + \varepsilon^2 p \frac{u_{2k}}{\sqrt{2}} \sin\omega_k p \right| \leq 1 . \tag{95}$$

Setzen wir die Erregerfrequenz α durch den Faktor δ mit der Biegeeigenfrequenz ω in die Beziehung $\alpha = \delta\omega_k$, so ergibt sich für u_{2k} aus (93) $u_{2k} = \dfrac{\omega_k}{2\sqrt{2}\,(\delta^2 - 4)}$ und weiter mit $p = \dfrac{2\pi}{\alpha} = \dfrac{2\pi}{\delta\omega_k}$ aus

$|\alpha_{11,k}| = 1$ für die Grenzkurven der Stabilitätsgebiete der Ausdruck

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\left(\mp 1 + \cos\frac{2\pi}{\delta}\right) 2\,\delta(\delta^2 - 4)}{\pi \sin\frac{2\pi}{\delta}}}\,. \tag{96}$$

Die Instabilitätsgebiete in der (ε, α)-Ebene nehmen jetzt ihren Ausgang von den Stellen $\delta = 2/n$, d.h. von den kritischen Erregerfrequenzen $\alpha = 2\,\omega_k/n$. Für den beliebig eingespannten Träger treten bei der zweiten Näherung bis ε^2 noch die Frequenzen „zweiter Art" $|\omega_k \mp \omega_m|$ hinzu,

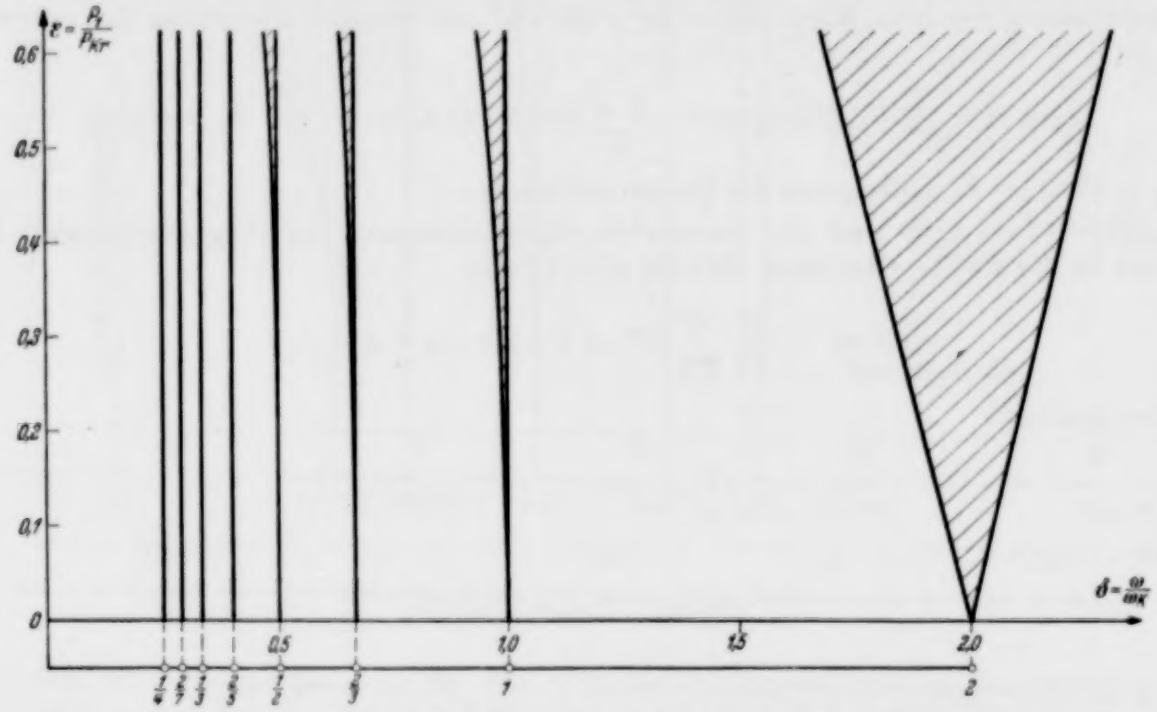

Abb. 8. 3. Beispiel: Durch $P_1 \cos \omega t$ belasteter frei aufliegender Träger. (Instabilitätsgebiete schraffiert.)

wie sich zeigen läßt. Die Grenzkurven (96) haben für alle Trägerabmessungen und für alle k Gültigkeit, während die Grenzkurven des Kipproblems jeweils immer nur für einen ganz bestimmten konkreten Fall gelten, da die dort auftretenden Entwicklungs-Koeffizienten von den Trägerabmessungen und von k abhängig sind, während das bei δ in (96) nicht der Fall ist. Hier brauchen wir daher im Gegensatz zu den beiden ersten Beispielen kein konkretes Zahlenbeispiel anzunehmen. Die aus (96) errechneten Grenzkurven sind in Abb. 8 aufgetragen. Die Ergebnisse gelten nur für solche Erregerfrequenzen, die wesentlich kleiner sind als die erste Eigenfrequenz der Longitudinalschwingungen. Die Instabilitätsgebiete stimmen mit den von *Mettler*[1] mit Hilfe einer *Mathieu*schen Differentialgleichung berechneten Bereichen schon bei der Näherung bis ε^2 genau überein.

(Eingegangen am 2. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *K. A. Reckling*, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Lehrstuhl für Mechanik (Prof. Dr.-Ing. *I. Szabó*).

[1] Vgl. Fußnote 2 auf S. 137.

Über die Einschaltung zusätzlicher Punkte beim Verfahren von Multhopp.

Von J. Weissinger.

Die Näherungsverfahren von *Trefftz-Glauert* [1] und *Multhopp* [2] zur Lösung der *Prandtl*schen Tragflügelgleichung

$$\gamma(\vartheta) = L(\vartheta)\,[\alpha(\vartheta) - \bar{\gamma}(\vartheta)] \tag{1}$$

mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\bar{f}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f'(\psi)}{\cos\psi - \cos\vartheta}\,d\psi$$

für eine beliebige Funktion $f(\vartheta)$ haben das eine gemeinsam, daß die gesuchte (dimensionslose) Zirkulationsverteilung $\gamma(\vartheta)$ als ein Sinus-Polynom $P(\vartheta)$ m-ten Grades angesetzt und dieses durch strenge Lösung der m Gleichungen

$$P(\vartheta_\nu) = L(\vartheta_\nu)\,[\alpha(\vartheta_\nu) - \bar{P}(\vartheta_\nu)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

oder kürzer

$$P_\nu = L_\nu(\alpha_\nu - \bar{P}_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmt wird, wobei die ϑ_ν m im Intervall $(0, \pi)$ gelegene Punkte sind. Ein Unterschied besteht darin, daß bei *Trefftz-Glauert* auf Grund des Ansatzes

$$P(\vartheta) = \sum_{n=1}^{m} a_n \sin n\vartheta$$

die Koeffizienten a_n, bei *Multhopp* die Funktionswerte $\gamma_n = \gamma(\vartheta_n)$ in dem Interpolationspolynom

$$P(\vartheta) = \frac{2}{m+1}\sum_{n=1}^{m}\gamma_n \sum_{\mu=1}^{m}\sin\mu\vartheta_n \sin\mu\vartheta \tag{3}$$

als Unbekannte angesehen werden. Während bei *Trefftz-Glauert* die Punkte ϑ_n beliebig gewählt werden können, kommen die großen rechnerischen Vorzüge des *Multhopp*schen Ansatzes nur dann zum Tragen, wenn die ϑ_n das Intervall $(0, \pi)$ äquidistant unterteilen:

$$\vartheta_n = \frac{n\pi}{m+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, m).$$

Haben also die Vorgaben $L(\vartheta)$, $\alpha(\vartheta)$ nur in einem kleinen Bereich des Flügels einen „unregelmäßigen" Verlauf, so kann man das bei *Trefftz-Glauert* durch Einschaltung einiger zusätzlicher Punkte im kritischen Bereich berücksichtigen, während bei der üblichen Form des *Multhopp*schen Verfahrens eine Hinzufügung von Punkten nur in den Intervallmitten möglich ist und zwar gleichzeitig in allen Intervallen, so daß also der Wunsch nach Einschaltung eines Punktes mindestens eine Verdoppelung der Gesamtzahl der Punkte und damit der Unbekannten, also mindestens eine Vervierfachung der Rechenarbeit zur Folge hat.

Zweck dieser Note ist der Hinweis, daß dieser einzige Nachteil des *Multhopp*schen Verfahrens insofern nur scheinbar ist, als man jedenfalls *einen* beliebig gelegenen Punkt hinzufügen, den Grad des Interpolationspolynoms also um 1 vergrößern kann, ohne den Rechenaufwand merklich zu erhöhen.

Sind nämlich $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m, \gamma_s$ beliebige Zahlen, ϑ_s ein beliebiger, von $\vartheta_n = n\pi/(m+1)$ $(n = 1, \ldots, m)$ verschiedener Punkt aus dem Intervall $(0, \pi)$, $P(\vartheta)$ der Ausdruck (3) und $P_s = P(\vartheta_s)$, so gilt für das Sinus-Polynom $(m+1)$-ten Grades

$$\gamma(\vartheta) = P(\vartheta) + \frac{\gamma_s - P_s}{\sin(m+1)\vartheta_s}\sin(m+1)\vartheta$$

---

[1] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Berlin 1929.
[2] *H. Multhopp*, Luftf.-Forschg. 15 (1938), S. 153.

offenbar

$$\gamma(\vartheta_s) = \gamma_s, \qquad \gamma(\vartheta_\nu) = \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\bar{\gamma}(\vartheta) = \bar{P}(\vartheta) + \frac{\gamma_s - P_s}{\sin(m+1)\,\vartheta_s} \frac{(m+1)\sin(m+1)\,\vartheta}{2\sin\vartheta}.$$

Wie bei *Multhopp* erhält man daher für den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(\vartheta) = \bar{\gamma}(\vartheta)$

$$\alpha_{i\nu} = \bar{\gamma}(\vartheta_\nu) = b_{\nu\nu}\gamma_\nu - \sum_{n=1}^{m}{}' b_{\nu n}\gamma_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

und überdies

$$\alpha_{is} = \bar{\gamma}(\vartheta_s) = \bar{P}_s + (\gamma_s - P_s)\frac{m+1}{2\sin\vartheta_s}, \qquad \bar{P}_s = \bar{P}(\vartheta_s).$$

Man kann also die Werte γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ aus dem üblichen Gleichungssystem von *Multhopp*

$$\gamma_\nu = L_\nu(\alpha_\nu - \alpha_{i\nu}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

unbeeinflußt durch die Hinzunahme von ϑ_s bestimmen und dann γ_s aus der Gleichung

$$\gamma_s = L_s(\alpha_s - \alpha_{is}) = L_s\left[\alpha_s - (\gamma_s - P_s)\frac{m+1}{2\sin\vartheta_s} - \bar{P}_s\right],$$

also

$$\gamma_s = \frac{1}{\dfrac{1}{L_s} + \dfrac{m+1}{2\sin\vartheta_s}}\left(\alpha_s + \frac{m+1}{2\sin\vartheta_s}P_s - \bar{P}_s\right) \tag{4}$$

ausrechnen. Eine einfache Umformung liefert

$$\frac{m+1}{2\sin\vartheta_s}P_s - \bar{P}_s = \frac{1}{(m+1)\sin\vartheta_s}\sum_{n=1}^{m}\gamma_n\sum_{\mu=1}^{m}(m+1-\mu)\sin\mu\vartheta_n\sin\mu\vartheta_s = \sum_{n=1}^{m}b_{sn}\gamma_n$$

mit

$$b_{sn} = \frac{a_{sn}\sin\vartheta_n}{(m+1)(\cos\vartheta_s - \cos\vartheta_n)^2}, \qquad a_{sn} = \begin{cases} \sin^2\dfrac{(m+1)\,\vartheta_s}{2} & (n \text{ grade}), \\ \cos^2\dfrac{(m+1)\,\vartheta_s}{2} & (n \text{ ungrade}). \end{cases} \tag{5}$$

Setzt man noch

$$b_{ss} = \frac{m+1}{2\sin\vartheta_s}, \qquad b_s = \frac{1}{L_s} + b_{ss}, \tag{6}$$

so kann man für (4) schreiben

$$\gamma_s = \frac{1}{b_s}\left(\alpha_s + \sum_{n=1}^{m}b_{sn}\gamma_n\right), \tag{7}$$

und der induzierte Anstellwinkel an der Stelle ϑ_s ist

$$\alpha_{is} = b_{ss}\gamma_s - \sum_{n=1}^{m}b_{sn}\gamma_n. \tag{8}$$

Ist insbesondere $\vartheta_s = (2k+1)\pi/(2m+2)$ ein Punkt des $(2m+1)$-punktigen Verfahrens, so werden alle $a_{sn} = \frac{1}{2}$ und damit die b_{sn} bzw. b_{ss} gleich den von *Multhopp* tabulierten Koeffizienten $b_{\nu n}$ bzw. $b_{\nu\nu}$ $(\nu = 2k+1)$ des $(2m+1)$-punktigen Verfahrens. Der nach (7) berechnete Wert γ_s ist dann also gerade der Wert, der sich beim ersten Iterationsschritt des $(2m+1)$-punktigen Verfahrens ergibt, wenn man nach der *Multhopp*schen Rechenvorschrift als nullte Näherung die Lösung des m-punktigen Verfahrens benützt.

Nach *Multhopps* Vorschlag wird eine beliebige Zirkulationsverteilung zweckmäßig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Verteilung berechnet. Zu den entsprechenden Gleichungen von *Multhopp* tritt dann statt (7) die Gleichung

$$\gamma_s = \frac{1}{b_s}\left(\alpha_s + \sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}}B_{sn}\gamma_n\right), \qquad B_{sn} = b_{sn} + b_{s\,m+1-n}, \qquad B_{s\,\frac{m+1}{2}} = b_{s\,\frac{m+1}{2}}$$

im symmetrischen und

$$\gamma_s = \frac{1}{b_s}\left(\alpha_s + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{sn}\,\gamma_n\right), \qquad C_{sn} = b_{sn} - b_{s\,m+1-n}$$

im antisymmetrischen Fall.

Zusammenfassung. Es empfiehlt sich, den Wert γ_s der Zirkulationsverteilung an einer Zwischenstelle ϑ_s nicht durch Einsetzen von ϑ_s in das *Multhopp*sche Interpolationspolynom (3), sondern nach (7) auszurechnen, da auf diese Weise die *Prandtl*sche Tragflügelgleichung (durch Erhöhung des Grades des Näherungspolynoms um 1) nicht nur an m, sondern an $m+1$ Stellen exakt befriedigt wird.

(Eingegangen am 3. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *J. Weissinger*, Hamburg 26, Wichernsgarten 1.

Die Auftriebsverteilung von Tragflügeln mit Tiefensprung.

Von **J. Weissinger.**

1. Einleitung. Da bei unstetiger Anstellwinkelverteilung die üblichen Methoden zur Lösung der *Prandtl*schen Tragflügelgleichung zu langsam konvergieren, hat *Multhopp* [1] ein Verfahren zur „Abspaltung" eines Sprunges angegeben, bei dem die gesuchte Zirkulationsverteilung γ dargestellt wird als Summe einer bekannten, nur von Größe und Lage des Sprunges abhängigen Funktion γ_{I} und einer unbekannten Verteilung γ^*, die einer *Prandtl*schen Gleichung mit stetiger Anstellwinkelverteilung genügt, also wie üblich berechnet werden kann. Der Versuch einer schematischen Übertragung dieser Abspaltungsmethode auf den Fall eines Sprunges in der Tiefenverteilung scheitert daran, daß die Tiefenverteilung in der *Prandtl*schen Gleichung hinsichtlich γ nicht additiv wie die Anstellwinkelverteilung, sondern multiplikativ auftritt, so daß die abzuspaltende Funktion γ_{I} notwendig vom Werte der unbekannten Funktion γ an der Sprungstelle abhängt. Im Folgenden soll gezeigt werden, daß die Übertragung des *Multhopp*schen Verfahrens, das insbesondere in seinen Bezeichnungen als bekannt vorausgesetzt wird, dennoch möglich ist und zu einer einfachen Rechenmethode — auch im Falle eines gleichzeitigen Sprunges von Anstellwinkel- und Tiefenverteilung — führt [2].

2. Das Rechenverfahren. Die mit dem Produkt bV der Spannweite b und der Anblasgeschwindigkeit V dimensionslos gemachte Zirkulationsverteilung genügt der Integrodifferentialgleichung

$$\gamma(\eta) = L(\eta)\,[\alpha(\eta) - \alpha_i(\eta)], \qquad \text{kurz: } \gamma = L(\alpha - \alpha_i) \tag{1}$$

mit

$$L(\eta) = \frac{c'_{a\,\infty}(\eta)\,l(\eta)}{2\,b}, \qquad \alpha_i(\eta) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d\gamma}{d\eta'}\,\frac{d\eta'}{\eta - \eta'},$$

in der $\eta = 2\,y/b$ die dimensionslose Spannweitenkoordinate, $c'_{a\,\infty}(\eta)$ die Profilkonstante, $l(\eta)$ die Tiefen- und $\alpha\,(\eta)$ die Anstellwinkelverteilung bedeuten.

Die Funktionen $L(\eta)$, $\alpha(\eta)$ sollen stetig sein außer evtl. an der Stelle $\eta = \eta_s$, wo sie einen Sprung haben dürfen, dessen Größe durch

$$\tau = \frac{L(\eta_s + 0) - L(\eta_s - 0)}{L(\eta_s + 0)\,L(\eta_s - 0)}, \qquad \sigma = \alpha(\eta_s + 0) - \alpha(\eta_s - 0) \tag{2}$$

gekennzeichnet sei. Da $\gamma(\eta)$ überall stetig sein muß, gilt an der Sprungstelle die Gleichung

$$\gamma_s = \gamma(\eta_s) = L(\eta_s + 0)\,[\alpha(\eta_s + 0) - \alpha_i(\eta_s + 0)] = L(\eta_s - 0)\,[\alpha(\eta_s - 0) - \alpha_i\,(\eta_s - 0)]\,,$$

aus der man für den Sprung des induzierten Anstellwinkels

$$\alpha_i(\eta_s + 0) - \alpha_i(\eta_s - 0) = \sigma + \tau\,\gamma_s \tag{3}$$

errechnet.

Wählt man in der Zerlegung

$$\gamma(\eta) = \gamma_{\mathrm{I}}(\eta) + \gamma^*(\eta) \tag{4}$$

die Funktion γ_{I} so, daß der zugehörige induzierte Anstellwinkel $\alpha_{i\mathrm{I}}$ an der Stelle η_s den Sprung $\sigma + \tau\,\gamma_s$ macht, so ist der von γ^* induzierte Anstellwinkel α_i^* stetig, und γ^* kann daher mit genügender Genauigkeit nach dem einfachen *Multhopp*schen Verfahren (ohne Abspaltung) berechnet werden.

---

[1] *H. Multhopp*, Luftf. Forsch. 15 (1938), S. 153.

[2] Veranlaßt zur Veröffentlichung dieses Rechenverfahrens, das im letzten Kriegsjahr während meiner Zugehörigkeit zur DVL-Adlershof entstanden ist, wurde ich durch eine Arbeit von *F. B. Hildebrand* (N. A. C. A. Techn. Notes No. 925), die mir kürzlich zugänglich wurde. Hier wird das gleiche Problem nach einer Methode der kleinsten Quadrate behandelt, die in ihrer numerischen Durchführung aber einen merklich größeren Arbeitsaufwand erfordert als die im folgenden beschriebene Abwandlung des *Multhopp*schen Verfahrens.

Nach *Multhopp* hat nun die stetige Zirkulationsverteilung

$$f(\vartheta)=\frac{2}{\pi}\left[(\cos\vartheta-\cos\vartheta_s)\ln\frac{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_s}{2}}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_s|}{2}}+\vartheta_s\sin\vartheta\right]' \qquad (\vartheta=\arccos\eta)$$

die Eigenschaft, daß ihr induzierter Anstellwinkel im Intervall $-1\leq\eta<\eta_s$ gleich 0, im Intervall $\eta_s<\eta\leq 1$ gleich 1 ist. Setzt man daher

$$\gamma_{\mathrm{I}}(\eta)=(\sigma+\tau\gamma_s)\,f(\eta)\,, \tag{5}$$

so gilt, wie verlangt,

$$\alpha_{i\,\mathrm{I}}(\eta)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad -1\leq\eta<\eta_s\,,\\ \sigma+\tau\gamma_s & \text{für}\quad \eta_s<\eta\leq 1\,,\end{cases} \tag{6}$$

und γ^* genügt der Gleichung

$$\gamma^*=L\cdot(\alpha^*-\alpha_i^*)\,,\qquad \alpha^*=\alpha-\alpha_{i\,\mathrm{I}}-\frac{\gamma_{\mathrm{I}}}{L}\,. \tag{7}$$

Das zugehörige *Multhopp*sche Gleichungssystem lautet

$$\gamma_\nu^*=L_\nu\,(\alpha_\nu^*-b_{\nu\nu}\,\gamma_\nu^*+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{\nu n}\,\gamma_{\nu n}^*) \qquad (\nu=1,2,\ldots,m), \tag{8}$$

reicht aber, falls nicht gerade η_s mit einem der *Multhopp*schen Punkte η_ν zusammenfällt, zur Bestimmung der m Unbekannten γ_ν^* noch nicht aus, weil α^* den unbekannten Wert γ_s enthält. Man muß daher die *Prandtl*sche Gleichung auch noch an der Stelle η_s heranziehen und erhält als zugehörige lineare Gleichung [1]

$$\gamma_s^*=L_s\left\{\alpha_s^*-b_{ss}\,\gamma_s^*+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{sn}\,\gamma_n^*\right\} \tag{9}$$

oder unter Beachtung von (4), (5), (7)

$$\gamma_s-\gamma_{\mathrm{I}\,s}=L_s\left\{\alpha_s-\alpha_{i\,\mathrm{I}\,s}-\frac{\gamma_{\mathrm{I}\,s}}{L_s}-b_{ss}\,[\gamma_s-(\sigma+\tau\gamma_s)\,f_s]+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{sn}\,\gamma_n^*\right\}\,,$$

d. h.

$$\gamma_s\left[\frac{1}{L_s}+b_{ss}(1-\tau f_s)\right]=\alpha_s-\alpha_{i\,\mathrm{I}\,s}+b_{ss}\sigma f_s+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{sn}\,\gamma_n^*\,. \tag{10}$$

Für die unstetigen Funktionen L, α, $\alpha_{i\,\mathrm{I}}$ ist dabei der Grenzwert von links oder rechts zu nehmen, aber natürlich für alle Funktionen von derselben Seite. Nimmt man z. B. den Grenzwert von links, so lautet (10)

$$\gamma_s\left[\frac{1}{L(\eta_s-0)}+b_{ss}(1-\tau f_s)\right]=\alpha(\eta_s-0)+b_{ss}\sigma f_s+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{sn}\,\gamma_n^*\,.$$

Ist $\tau f_s\neq 1$, so kann man statt γ_s leicht γ_s^* als Unbekannte einführen. Denn nach (4) und (5) gilt an der Stelle η_s

$$\gamma_s=\gamma_s^*+(\sigma+\tau\gamma_s)\,f_s\,,$$

folglich

$$\gamma_s=\frac{\gamma_s^*+\sigma f_s}{1-\tau f_s}\,,\qquad \sigma+\tau\gamma_s=\frac{\sigma+\tau\gamma_s^*}{1-\tau f_s}\,. \tag{11}$$

Das vollständige Gleichungssystem zur Bestimmung von γ^* und γ lautet dann

$$\left(b_{\nu\nu}+\frac{1}{L_\nu}\right)\gamma_\nu^*=\alpha_\nu-\alpha_{i\,\mathrm{I}\,\nu}-\frac{\sigma+\tau\gamma_s^*}{1-\tau f_s}\,\frac{f_\nu}{L_\nu}+\sum_{n=1}^{m}{}'\,b_{\nu n}\,\gamma_n^*\,,\qquad (\nu=1,2,\ldots,m,\,s) \tag{12}$$

mit

$$\alpha_{i\,\mathrm{I}\,\nu}=\alpha_{i\,\mathrm{I}}(\eta_\nu)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad -1\leq\eta_\nu<\eta_s\,,\\ \dfrac{\sigma+\tau\gamma_s^*}{1-\tau f_s} & \text{für}\quad \eta_s<\eta_\nu\leq 1\,.\end{cases} \tag{13}$$

Für $\nu=s$ muß wieder darauf geachtet werden, daß der Grenzwert für die unstetigen Funktionen L, α, $\alpha_{i\,\mathrm{I}}$ von der gleichen Seite her genommen wird.

---

[1] Vgl. *J. Weissinger*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 163.

3. Bemerkungen. a) Sind mehrere Sprungstellen $\eta_{s1}, \ldots, \eta_{sr}$ vorhanden, so muß man γ_I als Summe von Ausdrücken der Form (5) wählen, also ansetzen

$$\gamma = \gamma^* + \sum_{\varrho=1}^{r} (\sigma_\varrho + \tau_\varrho \gamma_{s\varrho}) f_\varrho$$

und zu den *Multhopp*schen Gleichungen noch die (9) entsprechenden Gleichungen an den Stellen $\eta_{s\varrho}$ hinzunehmen.

b) Normalerweise ist $L(\eta)$ eine symmetrische Funktion. Dann ist $\gamma(\eta)$ zugleich mit $\alpha(\eta)$ symmetrisch bzw. antisymmetrisch, und man kann die von *Multhopp* für diese Fälle angegebenen Vereinfachungen benutzen. Ist z. B. $\alpha(\eta)$ symmetrisch mit Sprungstellen bei $\eta = \eta_s > 0$ und $\eta = -\eta_s$ so nimmt man statt $f(\vartheta)$ die Funktion

$$F(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\left[(\cos\vartheta - \cos\vartheta_s)\ln\frac{\sin\frac{\vartheta+\vartheta_s}{2}}{\sin\frac{|\vartheta-\vartheta_s|}{2}} + (\cos\vartheta + \cos\vartheta_s)\ln\frac{\cos\frac{\vartheta+\vartheta_s}{2}}{\cos\frac{\vartheta-\vartheta_s}{2}} + 2\,\vartheta_s\sin\vartheta\right].$$

Dann bleiben alle obigen Formeln richtig, wenn man f durch F und $b_{\nu n}$ durch $B_{\nu n}$ ersetzt und ν, n von 1 bis $\frac{1}{2}(m+1)$ laufen läßt.

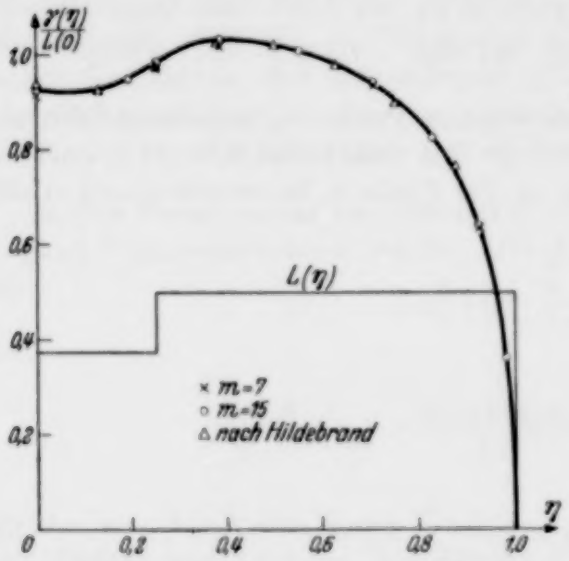

Abb. 1. Auftriebsverteilung des unverwundenen Flügels I.

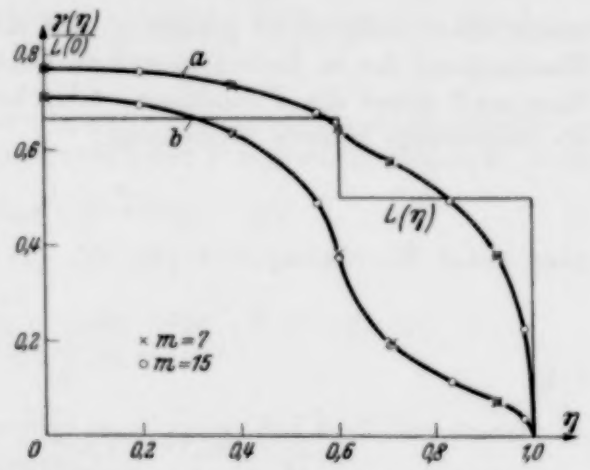

Abb. 2. Auftriebsverteilung des Flügels II, a) mit konstantem Anstellwinkel, b) mit Sprung des Anstellwinkels.

c) Im Gegensatz zu den Gleichungen von *Multhopp* sind die Gleichungen (12) nicht immer durch Iteration lösbar, oder das Iterationsverfahren kann zu langsam konvergieren. Man überzeuge sich also vorher, ob das Zeilensummenkriterium eine gute Konvergenz sicherstellt und wähle sonst ein anderes Auflösungsverfahren, etwa das von *Gauß*.

4. Zahlenergebnisse[1]. Von *Hildebrand*[2] ist der Fall

$$L(\eta) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & |\eta| < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{4} < |\eta| \leq 1 \end{cases}, \qquad \alpha(\eta) = 1 \ \text{(d. h. } \sigma = 0), \qquad \text{(I)}$$

also ein unverwundener rechteckiger Flügel der Streckung (16/15) $c'_{a\,\infty}$ mit einem rechteckigen Ausschnitt in der Mitte behandelt worden. Das Ergebnis ist in Abb. 1 eingetragen, in der die ausgezogene Kurve die Auftriebsverteilung darstellt, die sich nach dem oben geschilderten Verfahren mit $m = 15$ (9 lineare Gleichungen) ergibt. Man sieht, daß beide Methoden praktisch das gleiche Ergebnis liefern; die Unterschiede überschreiten nirgends 1%. Zum Vergleich ist auch das Ergebnis der Rechnung mit $m = 7$ (5 lineare Gleichungen) eingezeichnet; auch diese Genauigkeit dürfte praktisch schon ausreichen, zumal wenn man nach Lösung des Gleichungssystems noch einige Punkte dazwischen schaltet[3]. Eine übertriebene Genauigkeit in der Lösung der *Prandtl*schen Gleichung hat praktisch schon deshalb wenig Sinn, weil in dieser Gleichung

[1] Für die Durchführung der Rechnungen habe ich Frl. Dr. *H. Rohde* zu danken.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 166.
[3] Vgl. Fußnote 2 von S. 167.

Pfeilungs- und Randeinflüsse, die durch Sprünge in der Tiefenverteilung entstehen, nicht erfaßt sind.

Als zweites Beispiel wurde der Flügel

$$L(\eta) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für} \quad |\eta| < 0{,}6, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad 0{,}6 < |\eta| \leq 1 \end{cases} \tag{II}$$

betrachtet und zwar mit den Anstellwinkelverteilungen

$$\text{a)}\ \alpha(\eta) = 1 \qquad \text{b)}\ \alpha(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |\eta| < 0{,}6\,, \\ 0 & \text{für} \quad 0{,}6 < |\eta| \leq 1\,. \end{cases}$$

Auch hier stimmt das Ergebnis der Rechnung für $m = 7$ praktisch mit dem Resultat für $m = 15$ überein, wie aus Abb. 2 zu entnehmen ist.

Sind c_1, c_2 zwei beliebige Konstante, so ergibt sich die zu

$$\alpha(\eta) = \begin{cases} c_1 & \text{für} \quad |\eta| < 0{,}6\,, \\ c_2 & \text{für} \quad 0{,}6 < |\eta| \leq 1 \end{cases}$$

gehörige Auftriebsverteilung γ durch Superposition der beiden berechneten Verteilungen γ_a und γ_b als

$$\gamma = c_2\,\gamma_a + (c_1 - c_2)\,\gamma_b\,.$$

5. Zusammenfassung. Das Verfahren von *Multhopp* zur Berechnung der Auftriebsverteilung wird auf Tragflügel mit Sprüngen in der Tiefenverteilung ausgedehnt. Der Rechenaufwand ist nicht viel größer als in dem von *Multhopp* behandelten Fall eines Sprunges in der Anstellwinkelverteilung.

(Eingegangen am 3. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *J. Weissinger*, Hamburg 26, Wichernsgarten 1.

Zur Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung*.

Von G. Grammel.

1. Einleitung. In zwei grundlegenden Arbeiten hat *E. Mettler*[1] eine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper aufgestellt, dabei jedoch keine Dämpfungseinflüsse berücksichtigt. *F. Weidenhammer*[2] hat für den besonderen Fall des axial pulsierend belasteten Stabes ebenfalls Stabilitätsuntersuchungen angestellt, wobei er die *Mettler*schen Ergebnisse auf einem zweiten Weg bestätigt und auch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung berücksichtigt hat. Im folgenden wird nun gezeigt, wie man für jeden beliebigen elastischen Körper bei harmonisch pulsierender Belastung das Stabilitätsverhalten mit Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung berechnen kann. Den Ausgang hierzu bilden diejenigen Bewegungsgleichungen des Körpers, die man wie in M. I. ohne Berücksichtigung der Dämpfung erhält. Diese bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen, das nur Ableitungen gerader Ordnung enthält. In diesen Differentialgleichungen werden die geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsglieder additiv hinzugefügt. Jetzt hat man ein System von Differentialgleichungen, das die gedämpfte Bewegung des wirklichen Körpers beschreibt, aber auch Ableitungen ungerader Ordnung enthält. Durch eine Transformation mit einem Exponentialfaktor gewinnt man daraus ein neues Differentialgleichungssystem, das wieder nur Ableitungen gerader Ordnung enthält. Es wird gezeigt, daß dieses System die Bewegungsgleichungen eines Ersatzkörpers darstellt, der denselben geometrischen Bedingungen (Form und Lagerung) und denselben Belastungen unterliegt wie der wirkliche Körper, aber an Stelle der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung eine ausschlagproportionale Dämpfung besitzt. Für diesen Ersatzkörper entwickelt man dann streng nach M. II. die mathematischen Stabilitätsbedingungen, die durch Rücktransformation in diejenigen des wirklichen Körpers verwandelt werden. Damit ist das Problem grundsätzlich gelöst, und man muß nur noch aus den Stabilitätsbedingungen die zahlenmäßigen Werte berechnen. Für diese Berechnung wird ein Weg gezeigt, auf dem man in einem (ω, ε)-Koordinatensystem, wo ω die Frequenz der Belastung und ε ein Maß für die Amplitude der Belastung ist, punktweise die Grenzkurven der gesuchten Instabilitätsbereiche des wirklichen Körpers erhält.

2. Die Ausgangsgleichungen mit Berücksichtigung der Dämpfung. Die *Mettler*sche Theorie geht aus von der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen[3]. In ihr treten an Stelle der klassischen Dehnungen ε und γ und der klassischen Spannungen σ und τ die Verzerrungsgrößen

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

mit $g_{ij} = g_{ji}$, und die Spannungsgrößen k_{ij}, welche mit den g_{ij} im Bereich des *Hooke*schen Gesetzes durch die Elastizitätsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} k_{ij} &= G\, g_{ij} \qquad (i \neq j) \\ k_{ii} &= G\left(g_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{\mu=1}^{3} g_{\mu\mu}\right) \end{aligned}\right\} (i, j = 1, 2, 3)$$

mit dem Schubmodul G und der *Poisson*schen Konstante $\nu = 1/m$ verbunden sind. Hierbei ist (x_1, x_2, x_3) ein körperfestes Koordinatensystem, das im unbelasteten Zustand rechtwinkelig ist; u_i $(i = 1, 2, 3)$ sind die elastischen Verschiebungen eines Körperpunktes in Richtung der unverformten Koordinatenachsen. Vernachlässigt man die in den Verschiebungsableitungen

---

* Dissertation München 1951. Referent: Prof. Dr. *L. Föppl*, Korreferent: Prof. Dr. *R. Sauer*. Der Verfasser ist Herrn Prof. Dr. *L. Föppl* für seine stets freundliche Hilfe zu herzlichem Dank verpflichtet.

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 16 (1947), S. 135, weiterhin mit M. I. bezeichnet; Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418, weiterhin mit M. II. bezeichnet.

[2] *F. Weidenhammer*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 162.

[3] *R. Kappus*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 271 u. 344.

quadratischen Glieder bei den Verzerrungsgrößen g_{ij} und den Spannungsgrößen k_{ij}, so erhält man mit den üblichen Bezeichnungen der klassischen Theorie

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{2} g_{ii}, \quad \gamma_{ij} = g_{ij}, \\ \sigma_i &= k_{ii}, \qquad \tau_{ij} = k_{ij} \end{aligned}\right| \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

In der Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen hat man mit X_i als Volumkräften und p_i als Oberflächenkräften in Richtung der unverformten Koordinatenachsen 1, 2, 3 als elastisches Potential (Formänderungsarbeit) des Körpers

$$A = \frac{1}{4} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} k_{ij} \, dV, \tag{1}$$

als Potential der äußeren Kräfte

$$V = -\iiint \sum_{i=1}^{3} X_i u_i \, dV - \iiint \sum_{i=1}^{3} p_i u_i \, dO \tag{2}$$

und als kinetische Energie ohne Dämpfung

$$T = \int\int\int \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dV, \tag{3}$$

wobei sich die Raumintegrale über das gesamte Volumen, das Oberflächenintegral über die gesamte Oberfläche des Körpers erstrecken und dV ein Volumelement, dO ein Oberflächenelement des Körpers ist. Nach dem *Hamilton*schen Prinzip berechnet sich damit die eintretende Bewegung des Körperpunktes aus der Variationsgleichung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - A - V) \, dt = 0 .$$

Das Stabilitätsverhalten des Körpers untersucht man nach dem Prinzip der kleinen Schwingungen, indem man dem bekannten Grundbewegungszustand $u_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3, t)$ eine infinitesimale Nachbarbewegung $\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ linear überlagert, so daß

$$u_i = u_i^{(0)} + \bar{u}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

gilt. Instabilität tritt dann ein, wenn eines der $\bar{u}_i$ mit wachsender Zeit t beliebig groß werden kann. Setzt man die u_i aus (4) in die Ausdrücke (1), (2) und (3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} A &= A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)}, \\ V &= V^{(0)} + V^{(1)} + 0, \\ T &= T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)}, \end{aligned}$$

wobei die oberen Zeiger (0), (1) und (2) jeweils Glieder nullten, ersten und zweiten Grades in den $\bar{u}_i$ kennzeichnen.

Für die Grundbewegung gilt dann die Variationsgleichung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^{(0)} - A^{(0)} - V^{(0)}) \, dt = 0 . \tag{5}$$

Ferner ist

$$\int_{t_1}^{t_2} (T^{(1)} - A^{(1)} - V^{(1)}) \, dt \equiv 0 ,$$

weil dieses Integral die erste Variation von $\delta \int (T - A - V) = 0$ ist, wenn man für die δu_i insbesondere die $\bar{u}_i$ wählt, und weil der Grundzustand ein möglicher Bewegungszustand ist. Die $A^{(0)}$, $V^{(0)}$ und $T^{(0)}$ sind vollkommen frei von allen $\bar{u}_i$, so daß also als Variationsgleichung für die $\bar{u}_i$ lediglich

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^{(2)} - A^{(2)}) \, dt = 0 \tag{6}$$

übrig bleibt.

Mettler zeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$A^{(2)} = A_{klass} + A_{zus}$$

mit

$$A_{klass} = \frac{1}{4} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(1)} g_{ij}^{(1)} \, dV, \tag{7}$$

$$A_{zus} = \frac{1}{2} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \left(\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial x_j} \right) dV \tag{8}$$

und

$$T^{(2)} = \int\int\int \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \right)^2 dV \tag{9}$$

ist. Man erkennt, daß A_{klass} und $T^{(2)}$ die klassisch berechnete Formänderungsarbeit und kinetische Energie der Zusatzbewegungen $\bar{u}_i$ ist, wenn man sie am Körper ohne die Grundverformungen $u_i^{(0)}$ anbringt.

Bildet man von den Variationsgleichungen (5) und (6) die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen, so weiß man aus der analytischen Mechanik[1], daß diese Differentialgleichungen die Bewegungsgleichungen eines Körperelementes darstellen. Eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung erfaßt man also sinngemäß dadurch, daß man bei diesen Differentialgleichungen ein Dämpfungsglied $\beta \, \partial u_r^{(0)}/\partial t$ bzw. $\beta \, \partial \bar{u}_r/\partial t$ $(r = 1, 2, 3)$ additiv hinzufügt. Mit diesem Dämpfungsglied erhält man [vgl. M. I. Gl. (25) u. (26)] als Gleichgewichtsbedingungen, hier auf die Volumeinheit bezogen, aus der Variationsgleichung (6) die Differentialgleichungen

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial k_{rj}^{(1)}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_i} \right) = \varrho \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{10}$$

mit den Randbedingungen

$$\sum_{j=1}^{3} k_{rj}^{(1)} \cos(\mathfrak{n}, x_j) + \sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_j} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{n}$ der Oberflächennormalenvektor ist. Es gilt hier

$$\left.\begin{aligned} k_{ij}^{(1)} &= G \, g_{ij}^{(1)} \quad (i \neq j), \\ k_{ii}^{(1)} &= G \left(g_{ii}^{(1)} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \sum_{\mu=1}^{3} g_{\mu\mu}^{(1)} \right), \end{aligned}\right| \tag{12}$$

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}, \tag{13}$$

während die $k_{ij}^{(0)}$ die klassischen Spannungen σ und τ des Grundzustandes sind. Entsprechende Gleichgewichtsbedingungen erhält man aus der Variationsgleichung (5) für die Kräfte der Grundbewegungen $u_i^{(0)}$ ohne die Zusatzbewegungen $\bar{u}_i$. Diese Gleichgewichtsbedingungen mit Berücksichtigung der Dämpfung sind nun keine *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen mehr, da sie jetzt auch Ableitungen ungerader Ordnung enthalten. Durch die Transformation

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) = e^{-\frac{\beta}{2\varrho}} U_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

geht (10) über in

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial k_{rj}^{(1)}}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij}^{(0)} \frac{\partial U_r}{\partial x_i} \right) = \varrho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{4\varrho} U_r \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{15}$$

und die Randbedingungen (11) in

$$\sum_{j=1}^{3} k_{rj}^{(1)} \cos(\mathfrak{n}, x_j) + \sum_{j=1}^{3} p_j \frac{\partial U_r}{\partial x_j} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{16}$$

[1] Vgl. *G. Joos*, Lehrb. d. Theor. Physik. S. 98. Leipzig 1945.

Diese transformierten Differentialgleichungen (15) haben nur noch gerade Ableitungen der U_i nach der Zeit, können also wieder als *Euler-Lagrange*sche Differentialgleichungen eines neuen Variationsproblemes

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^* - A^*)\, dt = 0 \tag{17}$$

mit

$$T^* = \int\int\int \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dV + \int\int\int \frac{\beta^2}{8\varrho} \sum_{i=1}^{3} U_i^2\, dV, \tag{18}$$

$$A^* = A^*_{klass} + A^*_{zus}$$

und, mit Berücksichtigung der den Elastizitätsgleichungen (12) und (13) analogen Gleichungen,

$$A^*_{klass} = \frac{G}{4} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_j}\right] dV, \tag{19a}$$

$$A^*_{zus} = \frac{1}{2} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}^{(0)} \left(\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_j}\right) dV \tag{19b}$$

der U_i gedeutet werden. Es gilt jetzt statt (13)

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

während die Elastizitätsgleichungen (12) formal identisch bleiben. Die Richtigkeit dieser Behauptung beweist man durch Ausführen der Variation (17).

Während (19a) und (19b) mit (7) und (8) formal identisch sind, hat sich der Ausdruck der kinetischen Energie (18) gegenüber (9) durch Hinzutritt des zweiten Gliedes der rechten Seite geändert.

Betrachtet man die U_i als die Zusatzverschiebungen eines Ersatzkörpers, der denselben geometrischen Bedingungen (Form und Lagerung) wie der wirkliche Körper unterworfen ist, und nimmt man bei diesem Ersatzkörper für die Zusatzverschiebungen eine ausschlagproportionale Dämpfung, gekennzeichnet durch den Dämpfungsfaktor $(-\beta^2/4\varrho^2)$, an, so führt dies auf das Variationsproblem (17) bis (19). Es sind also die U_i die Zusatzverschiebungen eines solchen Ersatzkörpers, der unter denselben Belastungen steht wie der wirkliche Körper, der aber für die Zusatzverschiebungen U_i durchweg eine durch $(-\beta^2/4\varrho^2)$ gekennzeichnete ausschlagproportionale Dämpfung besitzt. Man erkennt ferner, daß eine Gleichung (14) entsprechende Transformation der Gleichgewichtsbedingungen der Grundbewegungen $u_i^{(0)}$, entstanden aus der Variationsgleichung (5), zu einem analogen Ergebnis führt. Diese Gleichgewichtsbedingungen werden in der weiteren Rechnung jedoch explizit nicht benötigt, lediglich die Erkenntnis, daß man zur Berechnung des Stabilitätsverhaltens des wirklichen Körpers von einem Ersatzkörper ausgehen kann, der nicht nur für die Zusatzbewegungen die oben entwickelte ausschlagproportionale Dämpfung besitzt, sondern dieser in seinen sämtlichen Bewegungen unterliegt.

Die Problemstellung lautet jetzt also folgendermaßen: Für einen Ersatzkörper, der denselben geometrischen Bedingungen und denselben Belastungen wie der wirkliche Körper unterliegt, jedoch an Stelle einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung jetzt eine ausschlagproportionale Dämpfung hat, sind die Stabilitätsbedingungen aufzustellen. Durch eine der Transformation (14) analoge Rücktransformation erhält man dann aus ihnen die Stabilitätsbedingungen des wirklichen Körpers.

Jetzt lassen sich auch die Größen $k_{ij}^{(0)}$ der Gleichungen (15) und (19b) deuten; sie sind die klassischen Spannungen dieses Ersatzkörpers für die Grundbewegungen $u_i^{(0)}$, also mit den Größen $k_{ij}^{(0)}$ aus (8) nicht mehr identisch.

Erwähnt muß werden, daß diese Überlegungen auf der angeführten Arbeit von *F. Weidenhammer* aufbauen.

3. Lösung des Variationsproblemes. Die Aufstellung der Stabilitätsgleichungen kann man mit kleinen Änderungen, die durch das Dämpfungsglied bedingt sind, nach der von *Mettler* in M. II.

dargelegten Theorie durchführen, wenn man für die äußeren Lasten wie dort die besondere Annahme macht

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \lambda X_i' + \varepsilon X_i'' \cos \omega t, \\ p_i &= \lambda p_i' + \varepsilon p_i'' \cos \omega t \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei X_i die Kräfte und p_i die Drücke bedeuten, und worin die Größen X_i', X_i'', p_i', p_i'' reine Ortsfunktionen sein sollen. Weil die $k_{ij}^{(0)}$ die klassisch berechenbaren Spannungen des Grundzustandes des Ersatzkörpers sind, gilt bei ihnen das Superpositionsgesetz, und sie haben demnach die Form

$$k_{ij}^{(0)} = \lambda \sigma_{ij}' + \varepsilon \sigma_{ij}'' \cos \omega t \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{20}$$

wo σ_{ij}' eine Funktion von X_i' und p_i', σ_{ij}'' von X_i'', p_i'' und ω ist.

Das Variationsproblem wird auf direktem Wege mit dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= u_{11} w_1 + u_{14} w_4 + \cdots + u_{1,\,n-2} w_{n-2}, \\ U_2 &= u_{22} w_2 + u_{25} w_5 + \cdots + u_{2,\,n-1} w_{n-1}, \\ U_3 &= u_{33} w_3 + u_{36} w_6 + \cdots + u_{3,\,n} w_n \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

gelöst, worin die u_{ij} beliebig wählbare, jedoch die Randbedingungen (11) erfüllende reine Ortsfunktionen, die w_i unbekannte reine Funktionen der Zeit t sind. Aus (18) und (19) erhält man mit (21)

$$L = T^* - A^* = \sum_{f,\,m=1}^{n} (A_{fm} \dot{w}_f \dot{w}_m - D_{fm} w_f w_m - \varepsilon \cos \omega t \cdot E_{fm} w_f w_m). \tag{22}$$

Hierin ist

$$D_{fm} = B_{fm} + \lambda C_{fm} - \beta^2 H_{fm}$$

und

$$A_{fm} = \frac{1}{2} \int\int\int \varrho \sum_{i=1}^{3} u_{if} u_{im} \, dV, \tag{23}$$

$$B_{fm} = \frac{G}{4} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial u_{if}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jf}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_i} \right) + \frac{4\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_{if}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{jm}}{\partial x_j} \right] dV, \tag{24}$$

$$C_{fm} = \frac{1}{2} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}' \left[\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial u_{\mu f}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\mu m}}{\partial x_j} \right] dV, \tag{25}$$

$$E_{fm} = \frac{1}{2} \int\int\int \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}'' \left[\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial u_{\mu f}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\mu m}}{\partial x_j} \right] dV, \tag{26}$$

$$H_{fm} = \frac{1}{8} \int\int\int \frac{1}{\varrho} \sum_{i=1}^{3} u_{if} u_{im} \, dV. \tag{27}$$

In (23) bis (27) sind diejenigen u_{ij}, welche im Ansatz (21) nicht vorkommen, gleich Null zu setzen. A_{fm}, D_{fm} und E_{fm} sind in den Zeigern f und m symmetrisch, außerdem sind A_{fm} und D_{fm} für jeden Körper eigene feste Zahlwerte, während E_{fm} vermöge σ_{ij}'' Funktionen von ω sind. Die Ausdrücke

$$A = \sum_{f,\,m=1}^{n} A_{fm} \dot{w}_f \dot{w}_m \quad \text{und} \quad D = \sum_{f,\,m=1}^{n} D_{fm} w_f w_m$$

werden durch eine Transformation in Normalkoordinaten

$$w_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \cdots + a_{in} v_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{28}$$

übergeführt in

$$A = \sum_{f=1}^{n} \dot{v}_f^2 \qquad \text{und} \qquad D = \sum_{f=1}^{n} \omega_f^2 v_f^2.$$

Die ω_f^2 erhält man dann bekanntlich als Wurzeln der ω_j^2 aus der Determinantengleichung

$$\| D_{fm} - \omega_j^2 A_{fm} \| = 0 \qquad (f, m = 1, 2, \ldots, n); \tag{29}$$

sie sind die Eigenfrequenzen des nur mit $\lambda X_i'$ und $\lambda p_i'$ belasteten Ersatzkörpers. Mit der Transformation (28) erhält man an Stelle der E_{fm} (26)

$$F_{fm} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{if} a_{jm} E_{ij} \qquad (f, m = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

welche wieder in den Zeigern f und m symmetrisch sind. Damit hat man jetzt für L (22) den Ausdruck

$$L = \sum_{f=1}^{n} (\dot{v}_f^2 - \omega_f^2 v_f^2) - \varepsilon \cos \omega t \cdot \sum_{f,m=1}^{n} F_{fm} v_f v_m ,$$

und es sind die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen des Variationsproblemes $\delta \int L \, dt = 0$ also

$$\ddot{v}_f + \omega_f^2 v_f + \varepsilon \cos \omega t \cdot \sum_{m=1}^{n} F_{fm} v_m = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots, n)$$

oder mit der Substitution $\tau = \omega t$

$$\omega^2 \frac{d^2 v_f}{d\tau^2} + \omega_f^2 v_f^2 + \varepsilon \cos \tau \cdot \sum_{m=1}^{n} F_{fm} v_m = 0 \qquad (f = 1, 2, \ldots, n). \tag{31}$$

Die $2n^2$ Partikularlösungen dieses Systemes *Mathieu*scher Differentialgleichungen kann man in der Form

$$V_{fr}(\tau) = e^{\varrho_r \tau} \varphi_{fr}(\tau), \qquad V_{fr}^*(\tau) = e^{-\varrho_r \tau} \varphi_{fr}(-\tau) \qquad (f, r = 1, 2, \ldots, n) \tag{32}$$

ansetzen, wo $\varphi_{fr}(\tau)$ bzw. $\varphi_{fr}(-\tau)$ periodische Funktionen der Periode 2π sind. Da nur die charakteristischen Exponenten ϱ_r mit wachsender „Zeit“ τ unendlich groß werden können, so sind diese maßgebend für das Stabilitätsverhalten. Beim Ersatzkörper liegt für $\varepsilon = 0$ in den Punkten

$$\omega = \omega_0 = \frac{|\omega_r + \omega_k|}{p} \qquad (r, k = 1, 2, \ldots, n;\ p > 0, \text{ ganz}) \tag{33}$$

Instabilität vor. Die Grenzkurven seiner Instabilitätsbereiche gehen also in einer (ω, ε)-Ebene von diesen Punkten ω_0 der ω-Achse aus. Wie schon aus früheren Untersuchungen [1] bekannt ist, liegen die Instabilitätsbereiche des wirklichen Körpers im Innern der Instabilitätsbereiche des Ersatzkörpers, enthalten jedoch die ω-Achse nicht mehr. Man nennt die Instabilitätsbereiche bei ω_0 mit $r = k$ Instabilitätsbereiche erster Art, die bei ω_0 mit $r \neq k$ Instabilitätsbereiche zweiter Art und p die Ordnung des Instabilitätsbereiches.

In die weitere Rechnung führt man mit

$$\varrho_r = i h_r \tag{34}$$

die dimensionslosen Größen

$$\frac{\omega}{\omega_0} = q, \qquad \frac{\omega_r}{\omega_0} = q_r, \qquad \frac{\omega_r}{\omega_0} h_r = \bar{q}, \qquad \frac{\beta}{2\varrho\,\omega_0} = \zeta \tag{35}$$

ein, entwickelt die F_{fm} in Potentenzreihen nach $(\omega - \omega_0)$

$$F_{fm} = F_{fm}^{(0)} + (\omega - \omega_0) F_{fm}^{(1)} + (\omega - \omega_0)^2 F_{fm}^{(2)} + \cdots, \tag{36}$$

setzt

$$F_{fm}^{(j)} \omega_0^{j-2} = G_{fm}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

und entwickelt die periodischen Funktionen φ_{fr} in komplexe *Fourier*-Reihen

$$\varphi_{fr}(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta} e^{i\eta\tau} .$$

Die Lösungen (32) lauten jetzt also

$$V_{fr}(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta} e^{i(h_r+\eta)\tau}, \qquad V_{fr}^*(\tau) = \sum_{\eta=-\infty}^{+\infty} c_{fr\eta} e^{-i(h_r+\eta)\tau}. \tag{38}$$

Es genügt, die Lösungen V_{fr} zu untersuchen; die Lösungen V_{fr}^* bringen dann nichts Neues mehr. Setzt man V_{fr} (38) in die Differentialgleichungen (31) ein, so hat man mit (34) bis (37) durch Null-

[1] Vgl. *E. Mettler*, Mitt. d. GHH.-Konz., Bd. 8, Heft 1 (1940), S. 1.

setzen der Faktoren der $e^{i(h_r+\eta)\tau}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&[(\bar{q}+\eta\, q)^2-q_f^2]\\&=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{m=1}^{n}(c_{m,r,\eta-1}+c_{m,r,\eta+1})\,[G_{fm}^{(0)}+G_{fm}^{(1)}(q-1)+G_{fm}^{(2)}(q-1)^2+\ldots]\\&\qquad(f=1,2,\ldots,n;\ \eta=0,\pm1,\pm2,\ldots).\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

Man entwickelt die $c_{f r \eta}$, q und $\bar{q}$, welche Funktionen von ε sind, in Potenzreihen nach ε:

$$\left.\begin{aligned}c_{f r \eta}&=c_{f r \eta}^{(0)}+\varepsilon\, c_{f r \eta}^{(1)}+\varepsilon^2 c_{f r \eta}^{(2)}+\cdots,\\q&=1+\varepsilon\, q^{(1)}+\varepsilon^2 q^{(2)}+\cdots,\\q&=q_r+\varepsilon\,\bar{q}^{(1)}+\varepsilon^2\bar{q}^{(2)}+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Setzt man diese Reihen in die Gleichungen (39) ein, so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von ε für die $c_{f r \eta}^{(j)}$ die Rekursionsformel

$$[(q_r+\eta)^2-q_f^2]\,c_{f r \eta}^{(j)}=K_{f r \eta}^{(j)}\qquad(j=0,1,2,\ldots)\tag{41}$$

mit

$$K_{f r \eta}^{(0)}=0\,,\tag{41.0}$$

$$K_{f r \eta}^{(1)}=-2\,(q_r+\eta)\,(\bar{q}^{(1)}+\eta\, q^{(1)})+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(0)}\,(c_{m,r,\eta-1}^{(0)}+c_{m,r,\eta+1}^{(0)})\,.\tag{41.1}$$

$$\left.\begin{aligned}K_{f r \eta}^{(j)}=&-\sum_{\tau=1}^{j}c_{f r \eta}^{(j-\tau)}\sum_{\xi=0}^{\tau}(\bar{q}^{(\xi)}+\eta\, q^{(\xi)})\,(\bar{q}^{(\tau-\xi)}+\eta\, q^{(\tau-\xi)})+\\&+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}G_{fm}^{(0)}\,(c_{m,r,\eta-1}^{(j-1)}+c_{m,r,\eta+1}^{(j-1)})+\\&+\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{j-1}\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{fm}^{(\tau)}\,(c_{m,r,\eta-1}^{(j-\tau-1)}+c_{m,r,\eta+1}^{(j-\tau-1)})\qquad(j=2,3,4,\ldots).\end{aligned}\right\}\tag{41, j}$$

Die Größen $\Gamma_{fm}^{(\tau)}$ stellen die Koeffizienten der ε^τ in der Reihe $(q-1)\,G_{fm}^{(1)}+(q-1)^2\,G_{fm}^{(2)}+\cdots$ dar. Mit den dimensionslosen Größen (35) gilt für die Punkte ω_0 (33)

$$q_r+q_k=p\quad(r=k\quad\text{oder}\quad r\neq k;\quad p>0,\ \text{ganz}).$$

Für einen bestimmten Instabilitätsbereich sind also k, r, p fest vorgegebene, f, m, η laufende Zahlen. Nach (41) und (41,0) sind die $c_{f r \eta}^{(0)}$ nur dann von Null verschieden, wenn

$$(q_r+\eta)^2-q_f^2=0\tag{42}$$

ist. Dies tritt ein für die Zeigerpaare

$$f=r\quad\text{mit}\quad\eta=0,\qquad f=k\quad\text{mit}\quad\eta=-p.\tag{43}$$

Für alle weiteren Zeigerpaare sei (42) verboten. Dann ist für alle f und η, welche die Bedingung (43) nicht erfüllen,

$$c_{f r \eta}^{(0)}=0\,.$$

Setzt man

$$c_{r r 0}^{(0)}=1\,,$$

und dividiert man die Lösungen V_{fr} mit $c_{f r \eta}$, so werden alle

$$c_{r r 0}^{(j)}=0\quad(j>0)\,,$$

und die

$$c_{k,r,-p}^{(j)}=c^{(j)}\qquad(j\geq0)$$

bleiben unbestimmte Integrationskonstanten. Nach diesen Festlegungen kann man aus den Gleichungen (41) für die Zeigerpaare f und η, welche die Bedingung (43) nicht erfüllen, der Reihe nach die $c_{f r \eta}^{(j)}$ berechnen, während man für die Zeigerpaare f und η, die (43) erfüllen,

$$K_{r,r,0}^{(j)}=0\,,\tag{44}$$

$$K_{k,r,-p}^{(j)}=0\qquad(j=1,2,3,\ldots)\tag{45}$$

erhält. Durch geeignete Wahl der $\bar{q}^{(j)}$ und $q^{(j)}$ lassen sich diese beiden Gleichungen stets erfüllen, und *Mettler* nennt sie die beiden Hauptgleichungen. Bei ausführlicher Schreibweise erhält man für diese Hauptgleichungen (44) und (45)

$$2\,q_r\,\bar{q}^{(j)} = \begin{cases} B^{(j)} & (j<p)\,, \qquad (46)\\ B^{(j)} + \varkappa\, c^{(0)} & (j=p)\,, \qquad (47)\\ B^{(j)} + \varkappa\, c^{(j-p)} & (j>p)\,, \qquad (48) \end{cases}$$

und

$$2\,q_k\,p\,q^{j)} = \begin{cases} E^{(j)} & (j<p)\,, \qquad (49)\\ E^{(j)} + \varkappa\left(\dfrac{q_k}{q_r}\,c^{(0)} + \dfrac{1}{c^{(0)}}\right) & (j=p)\,, \qquad (50)\\ E^{(j)} + \varkappa\, c^{(j-p)}\left(\dfrac{q_k}{q_r} - \dfrac{1}{c^{(0)^2}}\right) & (j>p)\,. \qquad (51) \end{cases}$$

Hierin ist $\varkappa$ eine Konstante, die von q_f und den $G^{(0)}_{fm}$ abhängt; die $B^{(j)}$ und $E^{(j)}$ sind für $j \leq p$ Konstante, die von den $G^{(j)}_{fm}$ $(j=1, 2, \ldots)$ und q_f abhängen, für $j>p$ Polynome von $1/c^{(0)}$, $c^{(0)}$, $c^{(1)}, \ldots, c^{(j-p-1)}$. Zu bemerken ist, daß insbesondere für $p=1$ gilt $\varkappa = \frac{1}{2}\,G^{(0)}_{kr}$ und daß für $p>1$ immer $B^{(1)} = E^{(1)} = 0$ ist.

Die Reihe $q(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\,q^{(1)} + \varepsilon^2\,q^{(2)} + \cdots$ stellt in einer (q, ε)-Ebene bzw. wegen (35) in einer (ω, ε)-Ebene eine Kurve dar, und in dieser Ebene ist für jeden Punkt (q, ε) aus

$$\bar{q}(\varepsilon) = -\,i\,\frac{\omega_r}{\omega_0}\,\varrho_r(\varepsilon) = q_r + \varepsilon\,\bar{q}^{(1)} + \varepsilon^2\,\bar{q}^{(2)} + \cdots$$

ein bestimmter Wert der charakteristischen Exponenten ϱ_r gegeben.

Damit ist das Variationsproblem grundsätzlich gelöst, und man kann beim Ersatzkörper für jeden Punkt einer (ω, ε)-Ebene angeben, ob er im Stabilitäts- oder Instabilitätsbereich liegt. Denn nach den Lösungen (32) der Differentialgleichungen des Variationsproblems (17) kann dann instabiles Verhalten des Ersatzkörpers für ein Wertepaar (ω, ε) eintreten, wenn für dieses einer der charakteristischen Exponenten ϱ_r einen nicht verschwindenden Realteil besitzt. Für diesen kann dann V_{fr} oder V^*_{fr} mit wachsender „Zeit" τ beliebig groß werden.

Nach der Transformation (14), dem Ansatz (21) und der Transformation (28) hat man als Zusammenhang zwischen den $\bar{u}_i$ und den Zeitfunktionen v_f

$$\bar{u}_i = e^{-\frac{\beta}{2\varrho\omega}\tau} \sum_{f,j=1}^{n} u_{ij}\,a_{jf}\,v_f \qquad (i=1, 2, 3)\,,$$

wo wieder die in (21) nicht vorkommenden u_{ij} gleich Null zu setzen sind. Da nun die $\bar{u}_i$ in den v_f und die v_f in den V_{fr} und V^*_{fr} linear und homogen sind, so kann man den Exponentialfaktor $\exp(-\beta\tau/2\varrho\omega)$ in den Lösungen V_{fr} und V^*_{fr} (32) zu deren Exponentialfaktoren $\exp(\varrho_r\tau)$ bzw. $\exp(-\varrho_r\tau)$ hereinmultiplizieren, und es herrscht demnach für den wirklichen Körper erst dann Instabilität, wenn $\exp(\pm\varrho_r - \beta/2\varrho\omega)\tau$ mit wachsender „Zeit" τ unendlich groß werden kann. Nach dem oben Gesagten ist dies erfüllt, wenn

$$|R(\varrho_r)| - \frac{\beta}{2\varrho\omega} > 0 \qquad (52)$$

ist, wo $R(\varrho_r)$ den Realteil von ϱ_r bedeutet. Mit (34) und den dimensionslosen Größen (35) erhält man für diese Bedingung (52)

$$|J(\bar{q})| > \zeta\,, \qquad (53)$$

wo $J(\bar{q})$ den Imaginärteil von $\bar{q}$ bedeutet.

4. Die Grenzkurven der Instabilitätsbereiche. Nach der Ungleichung (53) kann für den betrachteten Körper Instabilität auftreten, wenn $\bar{q} = q_r + \varepsilon\,q^{(1)} + \varepsilon^2\bar{q}^{(2)} + \cdots$ einen Imaginärteil besitzt, dessen Betrag größer als ζ ist. Für $\zeta = 0$, was $\beta = 0$ (keine Dämpfung) entspricht, tritt demnach Instabilität für die Werte (q, ε) auf, für die q reell und $\bar{q}$ komplex ist. Setzt man die willkürliche Integrationskonstante $c^{(0)}$ als komplexe Zahl

$$c^{(0)} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

an, so erhält man nach (47) und (50) mit $R = \sqrt{q_r/q_k}$ und beliebigem $\varphi \neq 0$

$$J\,(2\,q_k\,p\,q^{(p)}) = 0\,,$$

$$J\,(2\,q_r\,\bar{q}^{(p)}) \quad = \sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\sin\varphi\,.$$

Demnach ist hier $q^{(p)}$ reell, $\bar{q}^{(p)}$ komplex, und für $\zeta = 0$ kann Instabilität auftreten. Nach M. II sind die Koeffizienten $q_G^{(j)}$ der Grenzkurven q_G der Instabilitätsbereiche des Ersatzkörpers gegeben durch

$$q_G^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{2\,q_k\,p} \qquad (j < p)\,, \tag{54}$$

$$q_G^{(p)} = \frac{E^{(p)}}{2\,q_k\,p} \pm \frac{\varkappa}{p\sqrt{q_r\,q_k}} \qquad (j = p)\,, \tag{55}$$

$$q_G^{(j)} = \frac{E_G^{(j)}}{2\,q_k\,p} \qquad (j > p)\,. \tag{56}$$

In (56) ist $E_G^{(j)}$ der Wert von $E^{(j)}$, wenn man in ihm $c^{(j)} = c_G^{(j)}$ mit

$$c_G^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\,, \tag{57}$$

$$c_G^{(j-p)} = \mp\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{q_r}{q_k}\right)^{3/2}\left.\frac{\partial E^{(j)}}{\partial c^{(0)}}\right|_G \quad (j = p+1,\ p+2, \ldots) \tag{58}$$

setzt. Wegen beider möglichen Vorzeichen in (55), (57) und (58) erhält man damit für jeden Instabilitätsbereich des Ersatzkörpers, gekennzeichnet durch die zwei Zeiger k und r, zwei Grenzkurven

$$q_G = 1 + \varepsilon\,q_G^{(1)} + \varepsilon^2\,q_G^{(2)} + \cdots\,. \tag{59}$$

Um zu den Grenzkurven des Körpers mit $\zeta \neq 0$ zu gelangen, bildet man eine den betreffenden Instabilitätsbereich des Ersatzkörpers überdeckende Kurvenschar und bestimmt auf jeder dieser Kurven der Schar denjenigen Punkt (q_0, ε_0), in welchem für $\varepsilon > \varepsilon_0$ Instabilität, für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ Stabilität herrscht. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet die Grenzkurve des entsprechenden Instabilitätsbereiches des wirklichen Körpers und liegt noch ganz im Stabilitätsbereich des wirklichen Körpers. Diejenige Kurvenschar

$$q = f(\varphi, \varepsilon) = 1 + \varepsilon\,q_G^{(1)} + \cdots + \varepsilon^p\,q^{(p)} + \varepsilon^{p+1}\,q_G^{(p+1)} + \cdots \tag{60}$$

erfüllt in $0 < \varphi < \pi$ diese Bedingung, in welcher die Koeffizienten $q_G^{(j)}$ für $j \neq p$ mit den $q_G^{(j)}$ von (54) und (56) identisch sind, in $q^{(p)}$ jedoch

$$c^{(0)} = \sqrt{\frac{q_r}{q_k}}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{61}$$

ist, man also

$$q^{(p)} = \frac{E^{(p)}}{2\,q_k\,p} + \frac{\varkappa}{p\sqrt{q_r\,q_k}}\cos\varphi$$

hat. Aus der Forderung $q^{(j)} = q_G^{(j)}$ für $j \neq p$ und mit $c^{(0)}$ aus (61) erhält man die $c^{(j-p)}$ nach (51) zu

$$c^{(j-p)} = \frac{2\,q_k\,p\,q_G^{(j)} - E^{(j)}}{\varkappa\left(\dfrac{q_k}{q_r} - \dfrac{1}{c^{(0)2}}\right)} \quad (j = p+1,\ \ p+2, \ldots)\,. \tag{62}$$

Führt man diese Werte $c^{(j-p)}$ von (61) und (62) in die $\bar{q}^{(j)}$ $(j \gtrless p)$ von (47) und (48) ein, so erhält man für $0 < \varphi < \pi$ bei $\bar{q}$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil. Die Kurven $f(\varphi, \varepsilon)$ (60) liegen also alle im Instabilitätsbereich des Ersatzkörpers. Ferner gilt $c^{(0)} = c_G^{(0)}$ für $\varphi = 0$ oder π, und durch Bildung des Grenzwertes erhält man

$$c^{(j-p)}_{\lim c^{(0)} \to c_G^{(0)}} = c_G^{(j-p)}$$

Es schwenken somit die Kurven (60) für $c^{(0)} \to c_G^{(0)}$ d. h. für $\varphi \to 0$ oder π stetig in eine der beiden q_G-Kurven (59) über. Läßt man also φ stetig von 0 nach π gehen, so schwenkt die Kurve (60) stetig durch den Instabilitätsbereich des Ersatzkörpers.

Nach (53) gilt für Stabilität $|J(\bar{q})| \leq \zeta$, für Instabilität $|J(q)| > \zeta$. Nimmt man für $|J(\bar{q})|$ einen festen Wert an und variiert ζ stetig, so liegt bei $|J(q)| = \zeta$ der Grenzpunkt, bei dem gerade noch Stabilität herrscht. Setzt man also $c^{(\xi)}$ $(\xi \geq 0)$ aus (61) und (62) in (47) und (48) ein, so kommt

$$\bar{q}(\varphi, \varepsilon) = q_r + \varepsilon\, \bar{q}^{(1)} + \varepsilon^2\, \bar{q}^{(2)} + \cdots,$$

und man erhält den gesuchten Wert ε_0 der Grenzpunkte (q_0, ε_0) für jede durch ein festes φ_0 aus $0 < \varphi_0 < \pi$ definierte Kurve (60) aus der Gleichung

$$|J(\bar{q}[\varphi_0, \varepsilon_0])| = \zeta. \tag{63}$$

Hieraus fließen möglicherweise für ein φ_0 mehrere Werte ε_0. Derjenige Wert ε_0 ist zu nehmen, für den $|J(\bar{q}[\varphi_0, \varepsilon_0])|$ ein Minimum besitzt. Diesen Wert ε_0 und den entsprechenden Wert φ_0 setzt man in den Koeffizienten $q^{(p)}$ von (60) ein und erhält damit

$$q_0 = 1 + \varepsilon_0\, q_G^{(1)} + \cdots + \varepsilon_0^p \left(\frac{E^{(p)}}{2\, q_k\, P} + \frac{\varkappa}{P \sqrt{q_r\, q_k}} \cos \varphi_0 \right) + \varepsilon_G^{p+1}\, q_G^{(p+1)} + \cdots. \tag{64}$$

Damit sind die Grenzpunkte (q_0, ε_0) bestimmt, und man kann die Grenzkurven des betreffenden Instabilitätsbereiches des wirklichen Körpers mit Dämpfung punktweise in ein (q, ε)-Diagramm einzeichnen.

Die Gleichung (63) hat keine Wurzel $\varepsilon_0 = 0$. Es gibt deshalb in jedem Instabilitätsbereich einen Minimalwert $\varepsilon_{0\,min} > 0$, und es kann für keinen Wert q in diesem Instabilitätsbereich für $\varepsilon_0 < \varepsilon_{0\,min}$ Instabilität auftreten. Diesen Wert $\varepsilon_{0\,min}$ nennt man den Schwellwert, und man berechnet ihn, indem man $\varphi_0 = \pi/2$ setzt.

5. Beispiel. Im Anschluß an die Theorie sollen die Kippschwingungen eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt berechnet werden (Abb. 1). *Mettler* hat in seinen Arbeiten ebenfalls dieses Beispiel gewählt, und es sollen hier zu Vergleichszwecken dieselben Abmessungen und Materialkonstanten verwendet werden. Um die gewohnten Gleichungsformen zu erhalten, gilt wie bei *Mettler* $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

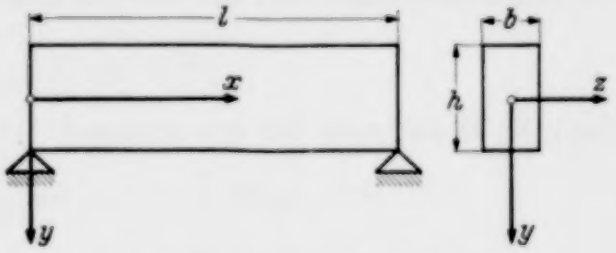

Abb. 1. Bezeichnungen für das Beispiel.

Die Abmessungen des Stabes sind: Länge $l = 100$ cm, Höhe $h = 10$ cm, Breite $b = 1$ cm. Ferner sei der Elastizitätsmodul $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm², der Schubmodul $G = 8{,}1 \cdot 10^5$ kg/cm², die Masse $\varrho = 8{,}0 \cdot 10^{-6}$ kgsec²/cm⁴, also die Masse der Längeneinheit $\mu = 8{,}0 \cdot 10^{-5}$ kgsec²/cm². Als Trägheitsmomente berechnet man mit den üblichen Bezeichnungen $J_y = 0{,}8333$ cm⁴, $J_z = 83{,}33$ cm⁴, $J_d = 3{,}130$ cm⁴ und als Trägheitsarm des Querschnittes $i_p = 2{,}901$ cm. Der Stab hat an beiden Enden Gabellagerungen, so daß er sich dort nur in x- und y-Richtung bewegen kann. Die Belastung besteht aus Endmomenten

$$M_E = \lambda\, M_0 + \varepsilon\, M_1 \cos \omega t,$$

welche den Stab in stabilem Zustand in y-Richtung ausbiegen. Für die Rechnung wählt man

$$\lambda\, M_0 = \frac{1}{2}\, M_k, \quad M_1 = M_k,$$

wo $M_k = 66\,170$ cmkg das Kippmoment des Stabes ist.

Nach M. I. macht man hier für die U_i den Ansatz

$$U_1 = 0, \quad U_2 = v - \vartheta z, \quad U_3 = w + \vartheta y,$$

wo $v(x, t)$ und $w(x, t)$ die zusätzlichen Ausbiegungen der Stabachse in der y- und z-Richtung, und $\vartheta(x, t)$ der Verdrehwinkel der Querschnitte um die Stabachse sind. Als Spannungen des Grundzustandes hat man

$$\sigma_x = \frac{M y}{J_z} \quad \text{und} \quad \int\int \tau_{xy}\, dy\, dz = \frac{\partial M}{\partial x}$$

mit M als Biegemoment. Das Doppelintegral erstreckt sich über den Stabquerschnitt.

Mit Berücksichtigung der ausschlagproportionalen Dämpfung erhält man für den Ersatzstab entsprechend den Gleichungen (18), (19) und (20) [vgl. M. II., Gl. (15) bis (18)]

$$T^* = \frac{\mu}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + i_P^2\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2\right] dx + \frac{\beta^2 F^2}{8\mu}\int_0^l (w^2 + i_p^2\,\vartheta^2)\,dx\,,$$

$$A^*_{klass} = \frac{E J_y}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{G J_d}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 dx\,,$$

$$A^*_{zus} = \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}(M\vartheta)\,dx\,,$$

$$M = \mathring{\lambda} M_0 + \frac{4\varepsilon M_1}{\pi}\cos\omega t \cdot \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sin\frac{k\pi}{l}x}{k\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{k\,y}}\right)^2\right]}\,.$$

wo $\sum'$ bedeutet, daß nur über ungerade k aufsummiert wird. Die $\omega_{k\,y}$ sind die k-ten Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des Ersatzstabes in y-Richtung, und es gilt

$$\omega_{k\,y}^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{E J_z}{\mu} - \frac{\beta^2}{4\varrho^2}\,. \tag{65}$$

Nach M. I. erhält man hier also für die Differentialgleichungen (15)

$$E J_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M\vartheta) + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta^2\frac{F^2}{4\mu}w = 0\,,$$

$$G J_d \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + M\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu i_P^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \beta^2 i_P^2\frac{F^2}{4\mu}\vartheta = 0\,.$$

Als Randbedingungen (16) hat man für Gabellagerung

$$w = \vartheta = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = l\,.$$

Nach M. II hat man für den Ansatz (21)

$$\left.\begin{aligned} w &= w_1 \sin\frac{\pi}{l}x + w_3\sin\frac{3\pi}{l}x + \cdots + w_{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{l}x\,,\\ \vartheta &= w_2\sin\frac{\pi}{l}x + w_4\sin\frac{3\pi}{l}x + \cdots + w_n\sin\frac{(n-1)\pi}{l}x\,. \end{aligned}\right| \tag{66}$$

Nach *Mettler* kann man nämlich bei diesem Ansatz die geraden Koordinatenfunktionen $\sin(k\pi x/l)$ mit geradem k weglassen, da die gesamte weitere Rechnung in zwei analoge Hälften mit geradem k und ungeradem k zerfällt, welche beide dasselbe Ergebnis liefern. Durch Hereinnahme des Dämpfungsgliedes ändert sich an diesen Überlegungen nichts.

Für die Ausdrücke D und A erhält man

$$D = \frac{\pi^2}{4l}\sum_{k=1}^{n-1}{}' k^2\left\{\left[E J_y\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \frac{F^2 l^2\beta^2}{4\mu\pi^2 k^2}\right]w_k^2 + 2\mathring{\lambda} M_0 w_k w_{k+1} + \left[G J_d - i_p^2\frac{F^2 l^2\beta^2}{4\mu\pi^2 k^2}\right]w_{k+1}^2\right.,$$

$$A = \frac{\mu l}{4}\sum_{k=1}^{n-1}{}' (\dot{w}_k^2 + i_p^2\,\dot{w}_{k+1}^2)\,.$$

Der Transformation (28) entspricht

$$\left.\begin{aligned} w_k &= \frac{2}{\sqrt{\mu l}}(v_k\cos\alpha_k - v_{k+1}\sin\alpha_k)\,,\\ w_{k+1} &= \frac{2}{i_p\sqrt{\mu l}}(v_k\sin\alpha_k + v_{k+1}\cos\alpha_k) \end{aligned}\right| \tag{67}$$

mit

$$\operatorname{tg} 2\alpha_k = \frac{2\mathring{\lambda} M_0 i_p}{E J_y\left(\frac{k\pi i_p}{l}\right)^2 - G J_d}\,.$$

jeweils für $k = 1, 3, 5, \ldots, n-1$. Die Determinante (29) wird damit

$$\begin{vmatrix} \left[EJ_y\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \frac{\beta^2 F^2}{4\mu} - \mu\omega_j^2\right] & \lambda M_0\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \\ \lambda M_0\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 & \left[GJ_d\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \frac{\beta^2 F^2 i_p^2}{4\mu} - \mu i_p^2 \omega_j^2\right] \end{vmatrix} = 0\,. \tag{68}$$

Ferner ist, wenn man mit $\bar{A}$ den mit ε multiplizierten Anteil von A^*_{zus} bezeichnet,

$$\bar{A} = \varepsilon M_1 \cos\omega t \cdot \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{i,k=1}^{n-1}{}' k^2 w_{i+1} w_k \int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{\sin\frac{j\pi}{l}x}{j\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{jy}}\right)^2\right]}\,dx\,. \tag{69}$$

Das logarithmische Dekrement der Schwingungen ist hier $\delta = \beta\pi/2\varrho\omega$, und zwar bleibt für Metall[1] stets $\delta < 10^{-2}$. Für die nachher berechneten Instabilitätsbereiche ergibt dies $\beta < 10^{-4}$ kg sec/cm^4. Ein derart kleines β ändert die Eigenfrequenzen (65) und die Wurzeln der ω_j^2 in (68) nur um vernachlässigbar kleine Werte, so daß man für die ω_{ky} und die ω_f die Werte von *Mettler* übernehmen kann, nämlich

$$\omega_{1y} = 1460\ \text{sec}^{-1},\ \omega_{3y} = 13\,140\ \text{sec}^{-1}$$

und

$$\omega_1 = 126{,}3\ \text{sec}^{-1},\ \omega_3 = 1294\ \text{sec}^{-1},$$
$$\omega_2 = 1929\ \text{sec}^{-1},\ \omega_4 = 5788\ \text{sec}^{-1}.$$

Für die Instabilitätsbereiche $\omega_0 = \omega_1$ und $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ist bei $k \geq 3$

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2 \approx 1,$$

so daß man nach M. II.

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\sin\frac{k\pi}{l}x}{k\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{ky}}\right)^2\right]} = \frac{\pi}{4} + Z(\omega)\sin\frac{\pi}{l}x$$

mit

$$Z(\omega) = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{1y}}\right)^2} - 1$$

setzen darf. Rechnet man im Ansatz (66) bis $n = 4$ (*Mettler* hat gezeigt, daß dann die Reihen (40) bei $\beta = 0$ schon gut konvergieren), so erhält man statt (69)

$$\bar{A} = \frac{\pi^2 M_1}{2l}\varepsilon\cos\omega t\,(w_1 w_2 + 9\,w_3 w_4) +$$
$$+ Z(\omega)\frac{16\,M_1}{l}\varepsilon\cos\omega t\left(\frac{1}{3}w_1 w_2 - \frac{1}{15}w_1 w_4 - \frac{3}{5}w_3 w_2 + \frac{81}{35}w_3 w_4\right).$$

und die Transformation (67) wird zahlenmäßig

$$w_1 = \frac{2}{\sqrt{\mu l}}(0{,}9994\,v_1 + 0{,}0380\,v_2),$$
$$w_2 = \frac{2}{i_p\sqrt{\mu l}}(-0{,}0380\,v_1 + 0{,}9994\,v_2),$$
$$w_3 = \frac{2}{\sqrt{\mu l}}(0{,}9992\,v_3 + 0{,}0389\,v_4),$$
$$w_4 = \frac{2}{i_p\sqrt{\mu l}}(-0{,}0389\,v_3 + 0{,}9992\,v_4).$$

Daraus berechnen sich die F_{fm} nach der Vorschrift (30), und aus ihnen für jeden Instabilitätsbereich die $G^{(j)}_{fm}$ nach (36) und (37).

[1] Vgl. *Benneewitz* u. *Rötger*, Physik. Z. 37 (1936), S. 578.

a) Instabilitätsbereich erster Art, zweiter Ordnung. Es gilt hier

$$\omega_0 = \omega_1 = 126{,}3\ \mathrm{sec}^{-1},$$
$$k = r = 1, \quad p = 2, \quad q_k = q_r = q_1 = 1,$$

also

$$c^{(0)}_{1,1,0} = 1,\ c^{(j)}_{1,1,0} = 0 \quad (j \geq 1),$$
$$c^{(j)}_{1,1,-2} = c^{(j)} \qquad (j \geq 0).$$

Aus den Gleichungen (44) und (45) ergeben sich sukzessiv mit den aus (41) berechneten

$$c^{(1)}_{m\,1\,\eta} = \frac{1}{(q_1+\eta)^2 - q_m^2} \begin{cases} \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m\,1}\, c^{(0)} & \text{für } \eta = -3, \\ \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m\,1}\, (c^{(0)} + 1) & \text{für } \eta = -1, \\ \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m\,1} & \text{für } \eta = +1, \end{cases}$$

$$c^{(2)}_{m\,1\,\eta} = \frac{1}{(q_1+\eta)^2 - q_m^2} \begin{cases} \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m\,1}\, c^{(1)} + q^{(1)} \frac{1}{2} G^{(1)}_{m\,1}\, c^{(0)} & \text{für } \eta = -3, \\ \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m\,1}\, c^{(1)} + q^{(1)} \frac{1}{2} G^{(1)}_{m\,1}\, (c^{(0)} + 1) & \text{für } \eta = -1, \\ \text{mal } \frac{1}{2} G^{(0)}_{m1} & \text{für } \eta = +1 \end{cases}$$

die $\bar{q}^{(j)}$ und $q^{(j)}$ zu

$$\bar{q}^{(1)} = 0,$$
$$q^{(1)} = 0,$$
$$\bar{q}^{(2)} = -0{,}4474 - 0{,}3906\, c^{(0)}$$
$$q^{(2)} = -0{,}4474 - 0{,}1958 \left(c^{(0)} + \frac{1}{c^{(0)}} \right),$$
$$\bar{q}^{(3)} = -0{,}3906\, c^{(1)},$$
$$q^{(3)} = -0{,}1958\, c^{(1)} \left(1 - \frac{1}{c^{(0)\,3}} \right).$$

Damit kommt für die q_G-Kurven (59)

$$q_G = 1 - (0{,}4474 \pm 0{,}3906)\, \varepsilon^2 + 0 \cdot \varepsilon^3,$$

für die Berechnung der ε_0 nach (63)

$$0{,}3906 \sin \varphi_0 \cdot \varepsilon_0^2 + 0 \cdot \varepsilon_0^3 - \zeta = 0$$

und für die Berechnung der q_0 nach (64)

$$q_0 = 1 - (0{,}4474 + 0{,}3906 \cos \varphi_0)\, \varepsilon_0^2 + 0 \cdot \varepsilon_0^3.$$

Hier ist $\zeta/\beta = 494{,}9\ \mathrm{cm^4/kgsec}$. In Abb. 2 sind die Grenzkurven für $\beta = 10^{-4}$ und $10^{-1}\ \mathrm{kgsec/cm^4}$ sowie die q_G-Kurven, also die Grenzkurven für $\beta = 0$, eingetragen.

b) Instabilitätsbereich zweiter Art, erster Ordnung. Es gilt hier

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 = 2055\ \mathrm{sec}^{-1},$$
$$k = 1, \quad r = 2, \quad p = 1, \quad q_k = 0{,}0614, \quad q_r = 0{,}9386,$$

und man erhält

$$\bar{q}^{(1)} = -2{,}088 \cdot 10^{-2}\, c^{(0)},$$
$$q^{(1)} = -2{,}088 \cdot 10^{-2}\, c^{(0)} + 3{,}190 \cdot 10^{-1} \frac{1}{c^{(0)}},$$
$$\bar{q}^{(2)} = -(0{,}1872\, c^{(0)\,3} + 2{,}088\, c^{(1)} - 4{,}382)\, 10^{-2},$$
$$q^{(2)} = -\left(121{,}1 \frac{1}{c^{(0)\,3}} - 3{,}190 \frac{c^{(1)}}{c^{(0)}} + 2{,}088\, c^{(1)} + 0{,}1872\, c^{(0)\,2} + 1{,}749 \right) 10^{-2}.$$

Berechnet man $\bar{q}^{(3)}$ und $q^{(3)}$ und setzt die Werte $c^{(0)}$ und $c^{(j-p)}$ aus (61) und (62) ein, so ist für $\varphi = 16°$, was $\varepsilon = 0{,}5$ entspricht, $|J(\bar{q}^{(3)})| < 10^{-6}$. Die Rechnung zeigt, daß man jeweils die Glieder mit ε^3 vernachlässigen darf, und es kommt somit für die q_G-Kurven nach (59)

$$q_G = 1 \mp 0{,}1632\,\varepsilon - 0{,}1253\,\varepsilon^2,$$

für die Berechnung der ε_0 nach (63)

$$0{,}02088 \sin\varphi_0 \cdot \varepsilon_0 + \left[1{,}368\,\frac{\sin 2\varphi_0}{1-\cos 2\varphi_0} - 0{,}6847\,\frac{\sin 4\varphi_0}{1-\cos 2\varphi_0}\right]\varepsilon_0^2 - \zeta = 0$$

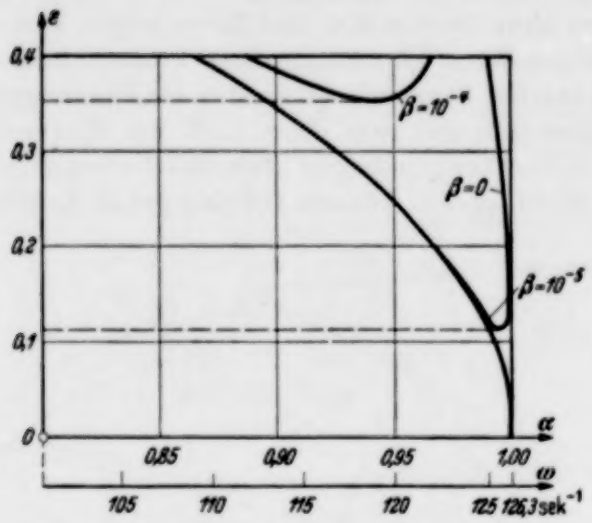

Abb. 2. Instabilitätsbereiche bei $\omega_0 = \omega_1$.

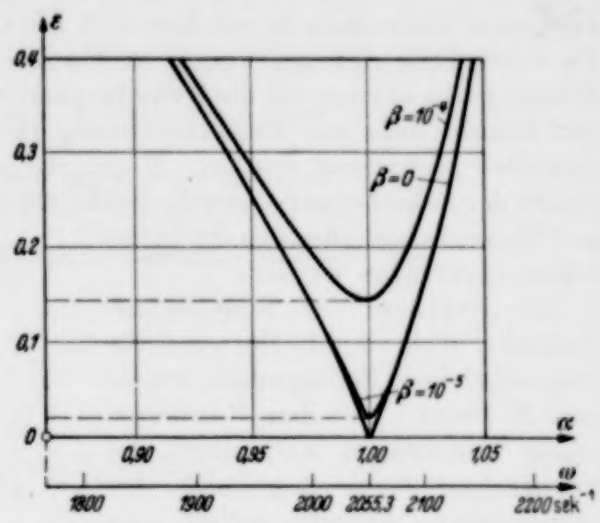

Abb. 3. Instabilitätsbereiche bei $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

und für die Berechnung der q_0 nach (64)

$$q_0 = 1 - 0{,}1632\cos\varphi_0 \cdot \varepsilon_0 - 0{,}1253\,\varepsilon_0^2\,.$$

Hier ist $\zeta/\beta = 30{,}415$. In Abb. 3 sind wieder die Grenzkurven für $\beta = 10^{-4}$ und 10^{-5} kgsec/cm^4 sowie die q_G-Kurven eingetragen.

(Eingegangen am 14. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Günther Grammel*, i. Fa. Schnellpressenfabrik Koenig & Bauer A. G. (13a) Würzburg 7.

Zur Synthese der Schiebepaar-Getriebe.

Von **K. Hain.**

1. Einleitung. Die Getriebe mit Schiebepaaren haben die gleichen willkommenen Eigenschaften wie die Getriebe, die nur Zylinderpaare enthalten. Ein Schiebepaar besteht bekanntlich aus einem Gleitschuh, in welchem sich der Gleitschieber ohne Drehen hin- und herbewegen kann. Da beide Teile sich gegenseitig in Flächen berühren (niederes Elementenpaar), können solche Schiebepaare ebenso wie die Zylinderpaare wesentlich stärker beansprucht werden als Paarungen mit Linien- oder nur Punktberührung (höhere Elementenpaare), wie diese z. B. bei Kurvengetrieben angewandt werden. Wegen der geringeren Abnutzungen ändert sich das Bewegungsgesetz der Schiebepaar-Getriebe praktisch überhaupt nicht, und es können beliebig große Kräfte und Momente bei hohen Geschwindigkeiten übertragen werden.

Die Synthese der Schiebepaar-Getriebe, d. h. deren Entwurf für vorgeschriebene Bedingungen, wurde von *R. Beyer* [1], auf den *Burmester*schen Grundlagen aufbauend, im eigentlichen Sinne begründet. Im vorliegenden Aufsatz sollen nun auch hierfür die vom Verfasser entwickelten Punktlagenreduktionen verwendet werden. Mit ihrer Hilfe

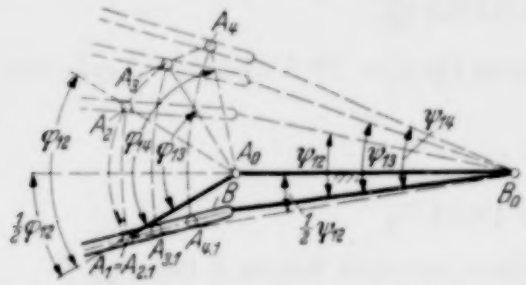

Abb. 1. Konstruktion einer Kurbelschleife für Zwei- und Drei-Winkelzuordnungen.

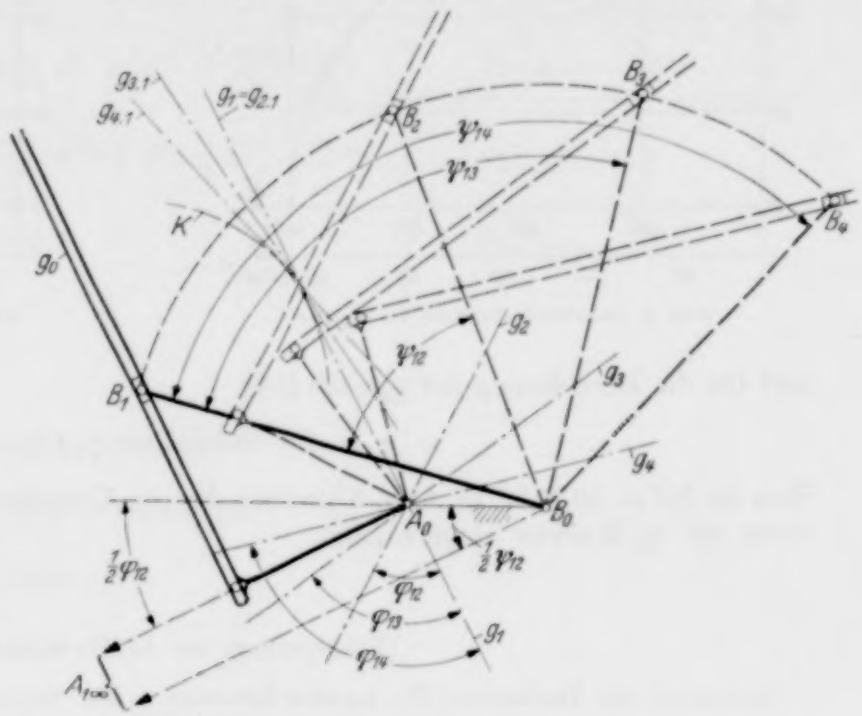

Abb. 2. Konstruktion einer Kurbelschleife für $\varphi_{12} = \psi_{12}$.

können unter bestimmten Voraussetzungen höhere Anforderungen erfüllt werden als dies bisher möglich war. Es sollen zunächst nur die Getriebe der Viergelenkkette behandelt werden.

2. Winkelzuordnungen. Winkelzuordnungen sind dann zu erfüllen, wenn die Bewegungen zweier im Gestell gelagerter Glieder einander zugeordnet werden sollen [2]. So sollen in Abb. 1 die Winkel φ_{12} und φ_{13} des Gliedes $A_0 A$ den Winkeln ψ_{12} und ψ_{13} des Gliedes $B_0 B$, das eine Gleitführung B haben soll, entsprechen. Man trägt im Gestellpunkt A_0 den Winkel $\frac{1}{2}\varphi_{12}$ und in B_0 den Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ an $A_0 B_0$ an. Der Schnittpunkt A_1 der freien Schenkel beider Winkel bestimmt die Kurbellänge $A_0 A$. Mit Hilfe der gegebenen Winkel φ_{12} und φ_{13} hat man auch die Kurbellagen $A_0 A_2$ und $A_0 A_3$. Nunmehr verschwenkt man die Punkte A_2 und A_3 um B_0 um die Winkel ψ_{12} und ψ_{13} in dem Sinne, wie sich das Glied $B_0 B$ von den Stellungen *2* und *3* in die Stellung *1* bewegen soll, und man erhält die Punkte $A_{2\cdot1}$ und $A_{3\cdot1}$, wobei gemäß den vorbereitenden Maßnahmen $A_{2\cdot1}$ mit A_1 als Punktlagenreduktion zusammenfällt. Man braucht nun nur noch die Gleitführung B als die Gerade $A_1 A_{3\cdot1}$ auszuführen und hat die gestellte Aufgabe mit Hilfe der so entstandenen Kurbelschleife erfüllt.

Ist noch ein drittes Winkelpaar $\varphi_{14} - \psi_{14}$ zu verwirklichen, so liegen nach den gleichen Konstruktionen die drei Punkte $A_1 = A_{2\cdot1}$, $A_{3\cdot1}$ und $A_{4\cdot1}$ im allgemeinen nicht auf einer Geraden.

[1] *R. Beyer*, Zur Synthese ebener und räumlicher Kurbeltriebe. VDI-Forschungsheft 394. Berlin 1939.
[2] *K. Hain*, Instrumentenkunde 63 (1943), S. 170.

Da aber in vielen Fällen nicht die absoluten Winkel φ oder ψ, sondern nur deren Verhältniswerte vorgeschrieben zu werden brauchen, kann man die Konstruktion so lange wiederholen, bis eine Gerade durch die drei Punkte zustande kommt.

Eine Kurbelschleife entsteht auch dann, wenn zwei zuzuordnende Winkel φ und ψ gleich groß sind (Abb. 2). Der Schnittpunkt A_1 der freien Schenkel der in A_0 und B_0 an $A_0 B_0$ angetragenen Winkel $\frac{1}{2}\varphi_{12}$ und $\frac{1}{2}\psi_{12}$ liegt im Unendlichen, da diese parallel zueinander sind. Die Kurbel $A_0 A$ wird hier ersetzt durch eine Gleitführung g_1, die in A_0 auf dem freien

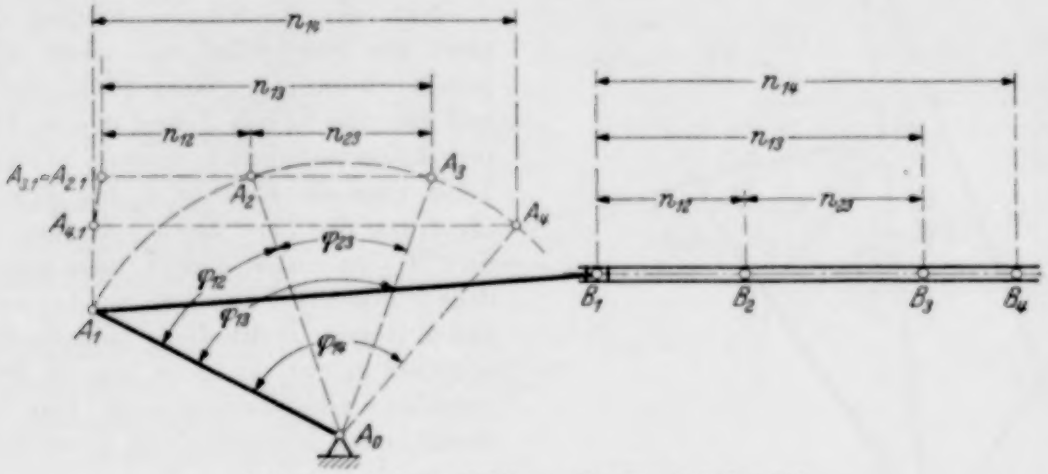

Abb. 3. Punktlagenreduktion an der Geradschubkurbel.

Schenkel von $\frac{1}{2}\varphi_{12}$ senkrecht steht. Die Lagen g_1 und g_2 liegen symmetrisch zum Gestell, während die Lagen g_3 und g_4 mit g_1 die Winkel φ_{13} und φ_{14} einschließen. Verdreht man die Gerade g_2 um B_0 um den Winkel $\psi_{12}=\varphi_{12}$ in dem Sinne, wie sich die Schwinge $B_0 B$ von der Lage *2* in die Lage *1* drehen soll, so fällt die so gedrehte Lage $g_{2\cdot1}$ mit g_1 zusammen; es ist also eine „Geradenreduktion" entstanden. Die Drehungen der Geraden g_3 und g_4 um B_0 um die Winkel ψ_{13} und ψ_{14} im gleichen Sinne ergeben die Lagen $g_{3\cdot1}$ und $g_{4\cdot1}$. An die drei Geraden $g_1 = g_{2\cdot1}$, $g_{3\cdot1}$, $g_{4\cdot1}$ kann man den berührenden Kreis k mit seinem Mittelpunkt B_1 zeichnen. Mit diesem Punkt sind die Abmessungen der Kurbelschleife bestimmt, wenn man die Geradführung g_0 parallel zur Geraden g_1 legt. Wenn sich also die Schwinge $B_0 B$ um die vorgeschriebenen Winkel ψ dreht, wird der Gleithebel $A_0 g_0$ um die ebenfalls vorgeschriebenen Winkel φ verschwenkt. Für dieses Beispiel der Kurbelschleife kann also eine Lagenreduktion nur herbeigeführt werden, wenn zwei zuzuordnende Winkel φ und ψ einander gleich sind.

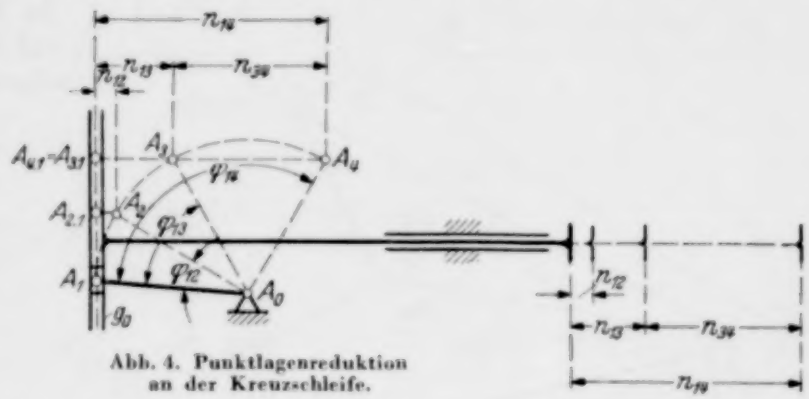

Abb. 4. Punktlagenreduktion an der Kreuzschleife.

3. Weg-Winkelzuordnungen. Mit Hilfe des Geradschubkurbel-Getriebes können vorgeschriebene Winkel der Antriebskurbel vorgeschriebenen Wegen des Gleitsteines zugeordnet werden. In Abb. 3 sollen den drei Winkeln $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$ die geraden Bewegungsabschnitte n_{12}, n_{13}, n_{14} eines Gleitsteines entsprechen. Für den Gleitstein B ist die Richtung und der Richtungssinn von B_1 nach B_4 vorgeschrieben, nicht aber eine Punktlage B_1, B_2, B_3 oder B_4 bezüglich des Drehpunktes A_0 der Kurbel $A_0 A$. Man zeichnet beliebig in der Zeichenebene beispielsweise die Strecke $A_2 A_3 = n_{23}$ und konstruiert über dieser Strecke als Grundlinie das gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenwinkel φ_{23} und dem als Kurbeldrehpunkt dienenden Spitzenpunkt A_0. Mit Hilfe der gegebenen Kurbelwinkel φ_{12} und φ_{14} kann man nun auch die Kurbellagen $A_0 A_1$ und $A_0 A_4$ aufzeichnen. Man läßt nun die Punkte A_2, A_3 und A_4 um die Strecken n_{12}, n_{13}, n_{14} in dem Sinne wandern, wie sich der Gleitstein von B_2, B_3, B_4 nach B_1 bewegen soll. Die Richtung dieser Bewegungen ist durch die Strecke $A_2 A_3$ gegeben. Man erhält dabei die Punkte $A_{2,}$, $A_{3\cdot1}$, $A_{4\cdot1}$, wobei $A_{2\cdot1}$ mit $A_{3\cdot1}$ als Punktlagenreduktion zusammenfällt. Der Kreis durch die drei Punkte A_1, $A_{2\cdot1}=A_{3\cdot1}$, $A_{4\cdot1}$

ergibt als Mittelpunkt den Gleitstein-Gelenkpunkt B_1, von dem aus die Gleitführung in der vorgegebenen Richtung, also parallel zu A_2A_3, ausgeführt werden kann. Es ist natürlich zulässig, für jeden der sechs möglichen Bewegungsabschnitte n mit dem dazugehörigen Winkel φ eine Punktlagenreduktion zu erzwingen. Auch doppelte Punktlagenreduktionen sind hier möglich, wenn von einem der zuzuordnenden Werte n oder φ nur deren Verhältnis vorgeschrieben ist. Es sind dann also Vierwinkel-Vierweg-Zuordnungen erfüllbar.

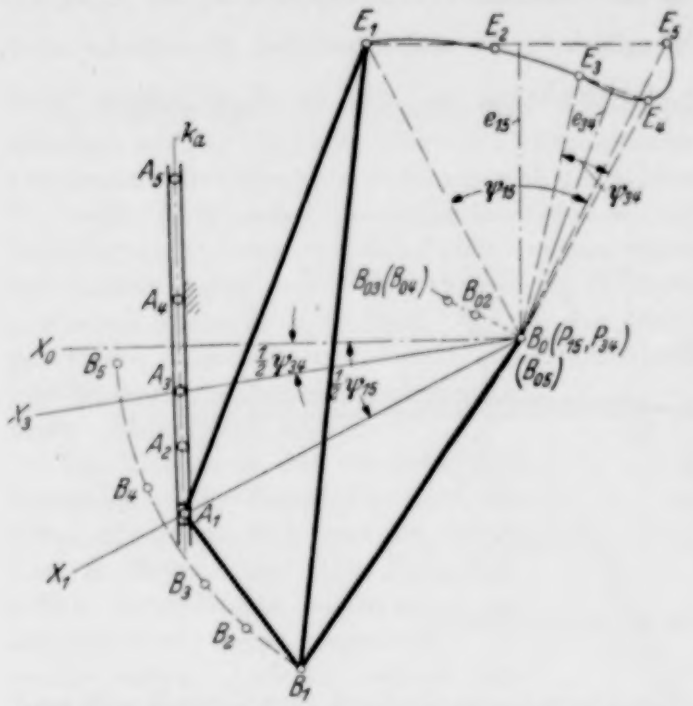

Abb. 5. Punktlagenzuordnungen für eine Geradschubkurbel, wenn die Verbindungsstrecke A_1A_2 senkrecht auf dem Strahl B_0X_0 steht.

Für die Geradschubkurbel von Abb. 3 tritt ein Sonderfall ein, wenn die Relativpunkte A auf einer Geraden liegen. In Abb. 4 soll für die Lagen *3* und *4* eine Punktlagenreduktion zustande kommen. Es ist $A_3A_4 = n_{34}$. Läßt man die Punkte A_2 bis A_4 in Richtung A_3A_4 um die Strecken n wandern, so fällt $A_{3\cdot1}$ mit $A_{4\cdot1}$ in einen Punkt zusammen. Da die drei Punkte A_1, $A_{2\cdot1}$, $A_{3\cdot1} = A_{4\cdot1}$ auf einer Geraden liegen, stellt diese Gerade einen Gleitschieber g_0 dar, in dem ein im Punkt A angelenkter Gleitstein gleitet. Das Getriebe ist damit eine Kreuzschleife geworden.

4. Erzeugung gegebener Kurven. Wenn eine gegebene Kurve als Koppelkurve z. B. eines Geradschubkurbel-Getriebes erzeugt werden soll, kann man eine Anzahl von Punkten auf dieser Kurve annehmen und das Getriebe so konstruieren, daß diese Punkte von einem Koppelpunkt des Getriebes genau durchlaufen werden. Zwischen diesen Punkten wird dann die Koppelkurve von der verlangten Kurve um so weniger abweichen, je mehr man genau zu durchlaufende Punkte annehmen kann.

In Abb. 5 sollen die fünf Punkte E_1 bis E_5 auf der gegebenen Kurve nach praktischen Erwägungen ausgewählt worden sein. Man

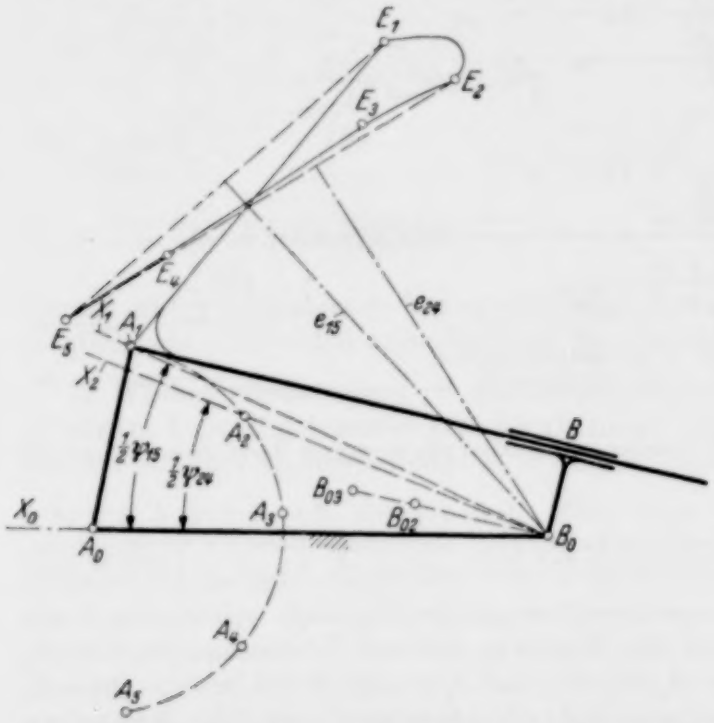

Abb. 6. Punktlagenzuordnungen für eine Kurbelschleife, wenn die Punkte B_0, B_{02}, B_{03} auf einer Geraden liegen.

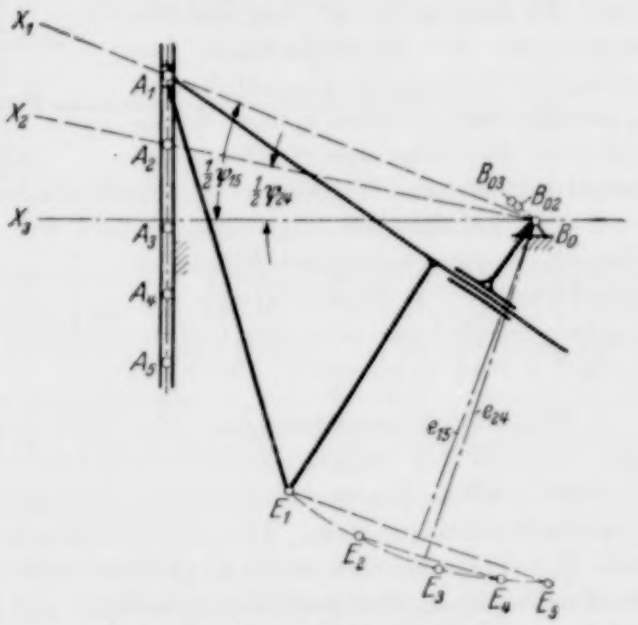

Abb. 7. Punktlagenzuordnungen für eine Winkelschleife.

bringt die Mittelsenkrechten e_{15} und e_{34} der Verbindungsstrecken zweier beliebiger Punktpaare E_1E_5 und E_3E_4 zum Schnitt B_0 und erhält die Winkel ψ_1 und ψ_{34}[1]. Mit B_0 als Ursprung zeichnet man dann ein beliebig in der Zeichenebene liegendes Strahlenbüschel mit den

[1] *K. Hain*, Maschinenbau-Betrieb. Beilage Getriebetechnik 11 (1943), S. 29.

Winkeln $\sphericalangle X_0 B_0 X_1 = \frac{1}{2}\psi_{15}$ und $\sphericalangle X_0 B_0 X_3 = \frac{1}{2}\psi_{34}$. Mit beliebigem, aber jeweils gleich großem Halbmesser schlägt man Kreisbögen um E_1 und E_3, welche die Strahlen B_0X_1 und B_0X_3 in den Punkten A_1 und A_3 schneiden. Dies wiederholt man so lange, bis die Verbindungsstrecke A_1A_3 senkrecht auf dem Strahl B_0X_0 steht. Den Punkt A_2 findet man als Schnittpunkt der Geraden A_1A_3 mit dem Kreisbogen um E_2 und E_1A_1 als Halbmesser. Die Punkte A_4 und A_5 liegen auf der Geraden A_1A_3 symmetrisch zu A_3 und A_1 und haben von E_4 und E_5 die Entfernung E_1A_1. Macht man: $\triangle E_1A_1B_{02} = \triangle E_2A_2B_0$ und $\triangle E_1A_1B_{03} = \triangle E_3A_3B_0$, so findet man die noch fehlende Gelenkpunktlage B_1 als Mittelpunkt des Kreises durch die drei Punkte B_0, B_{02}, B_{03}. Würde man die Dreieckskonstruktionen für die Punkte E_4, A_4 und E_5, A_5 durchführen, so würden als Punktlagenreduktionen die Punkte B_0 mit B_{05} und B_{03} mit B_{04} zusammenfallen. Der Gestellpunkt B_0 ist wegen der beschriebenen, vorbereitenden Maßnahmen gleichzeitig der Pol P_{15} und P_{34} der Koppel AB. Es ist klar, daß man auch noch sechs E-Punkte auf der gegebenen Kurve annehmen kann, wenn man die Lage des X-Strahlenbüschels so lange verändert, bis vier B_0-Punkte auf einem Kreis liegen. Außerdem gibt es fünf Möglichkeiten zur Paarung der fünf E-Punkte, so daß auch dadurch noch bestimmte Ansprüche bezüglich des Platzbedarfes und der Übertragungsverhältnisse erfüllt werden können.

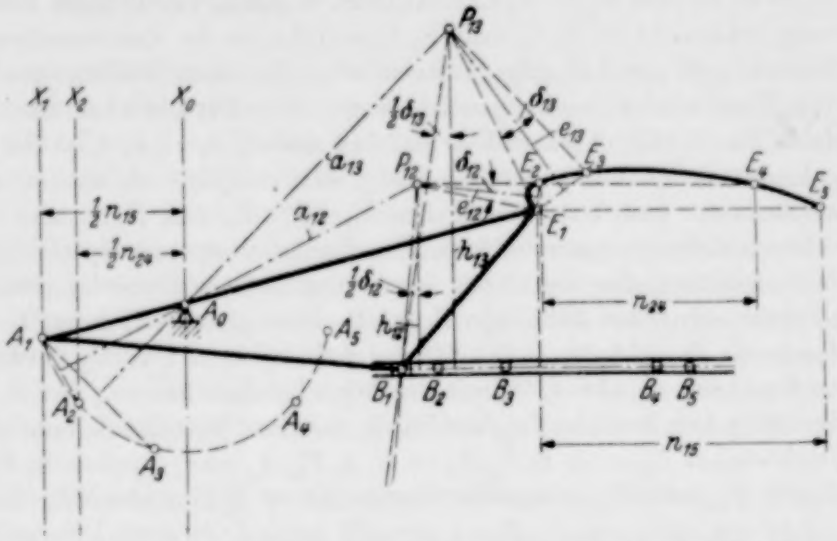

Abb. 8. Fünffache Punktlagenzuordnungen für eine Geradschubkurbel, wenn die Verbindungen zweier Punktlagenpaare parallel sind.

Führt man in Abb. 6 die Konstruktion wie in Abb. 5 durch und findet am Schluß, daß die drei Punkte B_0, B_{02}, B_{03} auf einer Geraden liegen, so erhält man eine Kurbelschleife mit der Gleitführung A_1B, welche parallel zu der Geraden durch die drei erwähnten Punkte liegt. Man kann für das beliebig in der Zeichenebene liegende X-Strahlenbüschel den Halbmesser so lange verändern, bis die drei B_0-Punkte auf einer Geraden liegen.

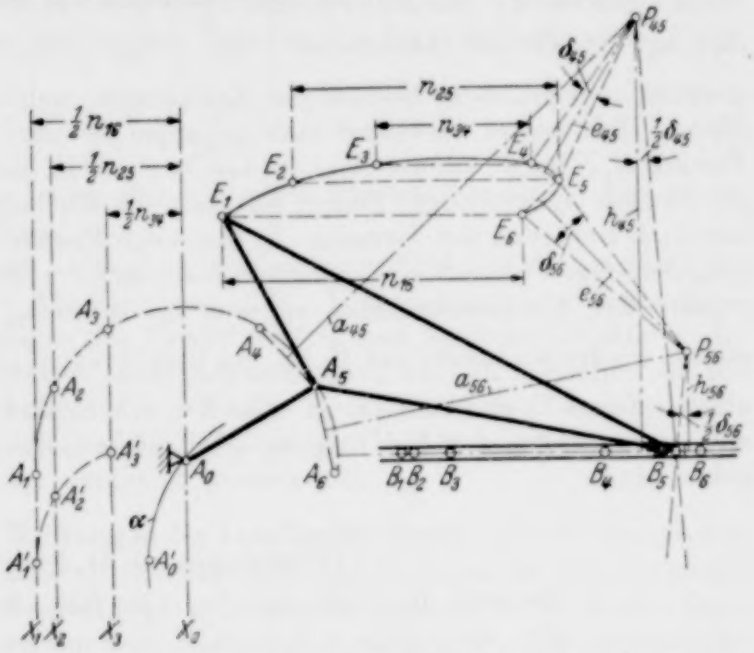

Abb. 9. Sechsfache Punktlagenzuordnungen für eine Geradschubkurbel, wenn die Verbindungen dreier Punktlagenpaare parallel sind.

In Abb. 7 entsteht eine Winkelschleife, wenn sowohl die Punkte A_1 und A_2 auf einer Geraden senkrecht zu B_0X_0 als auch die Punkte B_0, B_{02}, B_{03} auf einer Geraden liegen. Bei der Forderung nach einer Winkelschleife muß man für jede Lage des X-Strahlenbüschels den Halbmesser E_1A_1 so lange verändern, bis die Gerade A_1A_2 senkrecht auf B_0X_0 steht. Daraufhin muß man die Lage des X-Strahlenbüschels unter Beibehaltung seines Ursprunges B_0 verändern, bis auch die drei B_0-Punkte auf einer Geraden liegen. Es leuchtet ein, daß für eine Winkelschleife nach der angegebenen Konstruktion im Höchstfalle fünf Punktlagen auf einer gegebenen Kurve erfüllt werden können.

Ein Sonderfall bei den Punktlagenzuordnungen entsteht, wenn die Verbindungsgeraden zweier Punktlagenpaare, die zu Punktlagenreduktionen führen sollen, einander parallel sind. Dies trifft beispielsweise in Abb. 8 für die Punktlagenpaare $E_1 - E_5$ und $E_2 - E_4$ zu. Der Punkt B_0 als Schnittpunkt der hier parallelen Mittelsenkrechten auf E_1E_5 und E_2E_4 liegt im Unendlichen.

also bewegt sich der Punkt B auf einem Kreisbogen mit unendlich großem Halbmesser, d.h. es muß eine Gleitführung vorgesehen werden, die parallel zu den Strecken E_1E_5 und E_2E_4 ist. Über die Lage dieser Gleitführung ist dabei noch nichts ausgesagt. Das X-Strahlenbüschel, das seinen Ursprung im Punkt B_0 hat, besteht, da dieser Punkt im Unendlichen liegt, aus den parallelen Geraden X_0, X_1, X_2, wobei die Abstände $X_0X_1=\frac{1}{2}\,n_{15}$, $X_0X_2=\frac{1}{2}\,n_{24}$ sind, wenn $n_{15}=E_1E_5$ und $n_{24}=E_2E_4$ festgelegt werden. Im übrigen können die X-Geraden mit ihrer Richtung senkrecht zu E_1E_5 und E_2E_4 beliebig in der Zeichenebene liegen. Man schlägt um E_1 und E_2 Kreisbögen mit beliebig großem, aber gleichem Halbmesser, welche die Geraden X_1 und X_2 in den Punkten A_1 und A_2 schneiden. Die Mittelsenkrechte a_{12} auf der Strecke A_1A_2 schneidet dann die Gerade X_0 im Punkt A_0, und mit $A_0A_1=A_0A_2$ ist die Kurbellänge der im Gestellpunkt A_0 gelagerten Kurbel gegeben. Die Punkte A_3 bis A_5 findet man als Schnittpunkte des Kurbelkreises mit den Kreisbögen um E_3, E_4, E_5 mit E_1A_1 als Halbmesser. Die Punkte A_5 und A_4 müssen dabei symmetrisch zu den Punkten A_1 und A_2 bezüglich der Geraden X_0 liegen. Für die Konstruktion des Getriebes ist es gar nicht notwendig, ihre Lage zu ermitteln. Nunmehr bestimmt man zwei beliebige Pole, die eine gleiche Indexziffer haben, z. B. die Pole P_{12} und P_{13}, die beide die gleiche Indexziffer *1* haben. Den Pol P_{12} findet man als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten a_{12} auf A_1A_2 mit der Mittelsenkrechten e_{12} auf E_1E_2 und den Pol P_{13} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten a_{13} auf A_1A_3 mit der Mittelsenkrechten e_{13} auf E_1E_3. Damit sind auch die Drehwinkel $\delta_{12}=\sphericalangle\, E_1P_{12}E_2=\sphericalangle\, A_1P_{12}A_2$ und $\delta_{13}=\sphericalangle\, E_1P_{13}E_3=\sphericalangle\, A_1P_{13}A_3$ bekannt. An die durch P_{12} und P_{13} gehenden, senkrecht zu E_1E_5 stehenden Geraden h_{12} und h_{13} trägt man in dem Sinne, wie E_1 zu E_2 und E_3 liegt, die Winkel $\frac{1}{2}\,\delta_{12}$ und $\frac{1}{2}\,\delta_{13}$ an, deren freie Schenkel sich in B_1, der Punktlage *1* des Punktes B schneiden. Mit B_1 ist die Koppellänge A_1B_1 und die Lage der Gleitführung gegeben, die, wie bereits erwähnt, parallel zu E_1E_5 liegen muß.

Man kann auch eine Geradschubkurbel für sechs Punktlagen konstruieren, wenn die Verbindungen dreier Punktlagenpaare einander parallel sind, wie in Abb. 9 die Strecken $E_1E_6=n_{16}$, $E_2E_5=n_{25}$, $E_3E_4=n_{34}$. Das X-Strahlenbüschel hat die zu E_1E_6 senkrecht stehenden Geraden X_0, X_1, X_2, X_3 mit den Abständen $\frac{1}{2}\,n_{16}$, $\frac{1}{2}\,n_{25}$, $\frac{1}{2}\,n_{34}$. Man schlägt um E_1, E_2, E_3 mit beliebig großem, aber gleichem Halbmesser Kreisbögen, welche die X-Geraden in A_1', A_2', A_3' schneiden. Diesen Halbmesser verändert man so lange, bis der Mittelpunkt A_0' des Kreises durch die drei Punkte A_1', A_2', A_3' auf der X_0-Geraden liegt, d. h. bis die Kurve α aller Punkt A_0' die Gerade X_0 im Punkte A_0 schneidet. Damit hat man die Kurbelpunkte A_1, A_2, A_3 und die zu ihnen symmetrisch bezüglich der Geraden X_0 liegenden Punkte A_6, A_5, A_4. Es genügen auch hier wieder zwei beliebige Pole mit einer gleichen Indexziffer, z. B. die Pole P_{45} und P_{56}, die sich als Schnittpunkte der Mittelsenkrechten a_{45} und e_{45}, sowie a_{56} und e_{56} ergeben. Die Geraden h_{45} und h_{56} stehen wieder senkrecht auf E_1E_6. An diese trägt man die Winkel $\frac{1}{2}\,\delta_{45}$ und $\frac{1}{2}\,\delta_{56}$ in dem Sinne an, wie E_5 zu E_4 und zu E_6 liegt. Die freien Schenkel schneiden sich im Punkte B_5, womit auch alle Abmessungen der die Aufgabe erfüllenden Geradschubkurbel in der Getriebestellung *5* gegeben sind.

(Eingegangen am 14. November 1951.)

Anschrift des Verfassers: Ing. *Kurt Hain*, Braunschweig, Juliusstraße 31 f.

Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten*.

Von **Th. Pöschl.**

1. Erklärung des Begriffes der Hauptschwingungen für endliche Schwingweiten. Die Hauptschwingungen eines Systems von Punkten oder starren Körpern können anschaulich durch die Bedingung gekennzeichnet werden, daß alle zu dem System gehörigen Punkte zu gleichen Zeiten durch ihre Gleichgewichtslagen hindurchgehen und auch zu gleichen Zeiten ihre größten Ausweichungen aus den Gleichgewichtslagen erreichen. Auf diesem Gedanken beruhen die elementaren Methoden der Berechnung der Eigenfrequenzen für die kleinen Schwingungen der materiellen Systeme. Die gleiche Definition ist auch anwendbar, wenn die Schwingungen nicht auf kleine Ausweichungen von den Gleichgewichtslagen beschränkt werden. Es ist z. B. auch in diesem Fall jeder Lage der einen Masse eines Doppelpendels eine bestimmte Lage — genauer gesagt: zwei! — der zweiten Masse durch die Bedingung zugeordnet, daß die beiden Massen zu gleichen Zeiten durch ihre lotrechten Gleichgewichtslagen hindurchgehen und zu gleichen Zeiten ihre größten Ausweichungen erreichen.

Es besteht jedoch eine wesentliche Schwierigkeit, wenn man die Frage zu beantworten hat, wie tatsächlich die einander zugeordneten Lagen der beiden Massen des Doppelpendels berechnet werden sollen. Es ist wohl bekannt, daß das Problem des Doppelpendels exakt nur für kleine Werte der Ausweichungen lösbar ist. Ebenso ist bekannt, daß die Berechnung der Schwingdauer des einfachen Pendels schon auf elliptische Funktionen führt, und es kann als sicher gelten, daß die Erweiterung auf die Berechnung der Schwingdauern des Doppelpendels für endliche Ausschläge nicht einfacher werden kann. Andererseits kann man einen Näherungswert für die Schwingdauer des einfachen Pendels angeben, ohne elliptische Funktionen zu verwenden; so hat z. B. *Lord Rayleigh* auf direktem Wege eine zweite Näherung in der wohl bekannten Form gegeben:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{s^2}{16\,l^2}\right), \tag{1}$$

worin s die endliche Amplitude und l die Länge des einfachen Pendels bedeutet. Für kleine Schwingweiten verschwindet die Korrektion.

Es dürfte zweckmäßig sein, das Adjektiv „klein" in der Schwingungslehre nur im Sinn der Beschränkung auf lineare Ausdrücke in den Ansätzen und in den Ergebnissen zu verwenden.

Da die Lösungen der Bewegungsgleichungen des Doppelpendels und ähnlicher Probleme der Schwingungstechnik für endliche Schwingweiten nicht bekannt sind, würden zunächst nur die Methoden der Reihenentwicklung übrig bleiben, die jedoch z. B. im Falle des Doppelpendels recht umständlich werden. Für die praktische Auflösung derartiger Probleme kann man jedoch einen Kunstgriff anwenden, der im folgenden dargelegt werden soll.

2. Einführung des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Jacobischen Form. Für die Integration der Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels ist es wesentlich, daß in diesen die Zeit t explizite nicht vorkommt und daher mittels des Energieintegrals eliminiert werden kann. Durch diese Elimination wird die Ordnung des Problems um zwei Einheiten herabgesetzt. Die tatsächliche Ausführung dieser Elimination erfolgt am einfachsten schon in dem zugehörigen Variationsproblem, wobei statt des *Hamilton*schen Prinzips das Prinzip der kleinsten Wirkung zur Anwendung kommt, das in der von *Jacobi* angegebenen Form bekanntlich so lautet:

$$\delta\int_1^2 \sqrt{2\,(h - V)}\,ds = 0, \tag{2}$$

wobei V die potentielle Energie und h die Energiekonstante bedeutet. Für das Doppelpendel erhält man dann unmittelbar eine von t unabhängige Differentialgleichung zweiter Ordnung in den beiden Lagenkoordinaten des Doppelpendels (x und y oder φ und ψ), welche gleichen Werten der Zeit t entsprechen. Nach der Elimination von t sind diese beiden Koordinaten

* Erweiterte Bearbeitung eines beim IV. Kongreß der Italienischen Mathematiker-Vereinigung in Taormina gehaltenen Vortrages.

Funktionen voneinander und entsprechen einander in dem oben erklärten Sinn. Jedes Wertepaar (x und y oder φ und ψ) erfüllt daher vollständig die notwendigen Bedingungen für die Lösung des Problems. Wenn einander zugeordnete Werte dieser Koordinaten den Geschwindigkeiten Null entsprechen sollen, also die Grenzlagen der Schwingungen bedeuten, so kann die Energiekonstante h sogleich angegeben und die Integration bis zu diesen Grenzlagen ausgeführt werden. Für die beiden Hauptschwingungen eines Doppelpendels bilden diese Grenzlagen zwei Kurven, von denen jede durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt ist. Diese Kurven werden im folgenden kurz als Grenzkurven der Schwingungen bezeichnet und in einem Schaubild dargestellt.

3. Anwendung auf kleine Schwingungen. Zur Erläuterung der angegebenen Methode mögen hier zunächst die Bewegungsgleichungen für die kleinen Schwingungen des Doppelpendels angeführt werden; der Einfachheit halber mögen die beiden Pendelfäden gleiche Längen (l) und die Pendel gleiche Massen (m) haben. Werden als Koordinaten nach Abb. 1 die Abstände von der Lotrechten x, y eingeführt, so lauten diese Bewegungsgleichungen bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2g}{l}x + \frac{g}{l}(y-x)\,, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}(y-x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die beiden letzten Glieder stellen die Kopplungsglieder dar. Für die Integration dieses Systems hat man bekanntlich zu setzen

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = B\cos(\omega t + \alpha)$$

und erhält für ω die algebraische Gleichung vierten Grades

$$\omega^4 - 4\,\omega^2\frac{g}{l} + 2\,\frac{g^2}{l^2} = 0. \tag{4}$$

Ihre Wurzeln sind

$$\omega_{1,2}^2 = \left(2 \mp \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}\,, \tag{5}$$

und die Verhältnisse zwischen den Amplituden in den beiden Schwingungsarten haben die Werte

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{B_1}{A_1} = \sqrt{2} + 1\,, \\ c_2 &= \frac{B_2}{A_2} = -\left(\sqrt{2} - 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

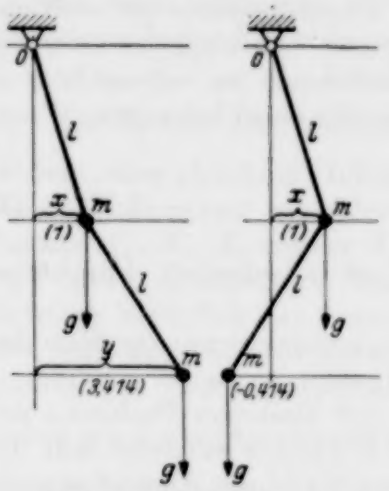

Abb. 1. Grundschwingung und (erste) Oberschwingung des Doppelpendels.

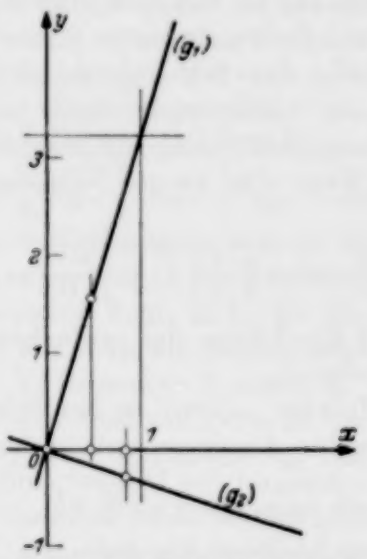

Abb. 2. Schaubild der Schwingungsausschläge für das linearisierte Problem.

Die beiden Hauptschwingungen unterschieden sich nicht nur durch die Werte der Frequenzen (die Eigenwerte des Problems), sondern auch durch die Werte der Verhältnisse der Amplituden in den beiden Schwingungen.

In übersichtlicher Weise können diese Ergebnisse durch ein Schaubild nach Abb. 2 dargestellt werden, wobei entsprechende Werte der Veränderlichen x und y als Cartesische Koordinaten auf zwei rechtwinkligen Achsen aufgetragen werden. Die beiden geraden Linien mit den Gleichungen

$$y = c_1 x, \qquad y = c_2 x \tag{7}$$

geben dann die Gesamtheit der Werte von x und y für entsprechende Lagen der beiden Massen des Doppelpendels in den beiden Schwingungstypen an.

4. Die Differentialgleichung für zugeordnete Lagen des Doppelpendels. Diese beiden Geraden und die vollständige Lösung kann man auch unmittelbar aus dem *Jacobi*schen Prinzip entnehmen, das im vorliegenden Falle die Form annimmt

$$\delta\int_1^2 \sqrt{2\,(h-V)}\,ds = \delta\int_1^2 \sqrt{2\left[h - \frac{g}{l}\left(\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2\right)\right]}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 0. \tag{8}$$

Wenn der Integrand mit F bezeichnet wird, so lautet die *Lagrange*sche Gleichung dieses Variationsproblems

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

und nimmt im vorliegenden Falle die Form an

$$\left[2\left[h - \frac{g}{l}\left(\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2\right)\right]\right] y'' - \frac{g}{l}\left[(3x - y)\,y' + x - y\right](1 + y'^2) = 0. \tag{10}$$

Von dieser Gleichung benötigen wir nur die beiden Lösungen für den singulären Punkt $x = 0$, $y = 0$ mit den Anfangspunkten $x = 0$ und $y = 0$ und den Umkehrwerten $x = \xi$, $y = \eta$. Die Energiekonstante h nimmt dann die Form an

$$h = \frac{g}{l}\left(\frac{3}{2}\xi^2 - \xi\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right), \tag{11}$$

und der Koeffizient von y'' verschwindet. Somit bleibt dann die folgende Gleichung übrig, in der wir wieder x, y an Stelle von ξ, η schreiben:

$$y' = -\frac{x - y}{3x - y}. \tag{12}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$y' = \frac{y}{x} = c\,; \tag{13}$$

daher ist

$$c = -\frac{1 - c}{3 - c} \quad \text{oder} \quad c^2 - 2c - 1 = 0. \tag{14}$$

Die Wurzeln sind

$$c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \tag{15}$$

und dies sind dieselben Werte wie in Ziff. 2.

Die Schwingdauer ergibt sich aus der Energiegleichung in der Form

$$T = 4\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2(h - V)}} = 4\int_0^{(\xi,\,\eta)} \frac{\sqrt{1 + y'^2}\,dx}{\sqrt{2\left[h - (3x^2 - 2xy + y^2)\right] g/l}}, \tag{16}$$

in die man $y = c_1 x$ bzw. $y = c_2 x$ einzusetzen hat. Man erhält daher

$$T = 4\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{\pi}{2} \tag{17}$$

und

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = (2 \mp \sqrt{2})\,\frac{g}{l}, \tag{18}$$

also wieder dieselben Werte wie in Ziff. 2.

5. Die Differentialgleichung für allgemeine Form der potentiellen Energie. Für einen Schwinger mit derselben Form der kinetischen Energie T, aber von einer beliebigen Form der potentiellen Energie $V = V(x, y)$ ergeben sich die Differentialgleichungen der Grenzkurven durch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x}y' - \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

Die Gleichgewichtslagen $x = 0$, $y = 0$ des zweigliedrigen Schwingers stellen in allen Fällen einen singulären Punkt dar, und die Werte der Ableitungen $y' = dy/dx$ in diesem Punkte können als bekannt angesehen werden, da die Lösungen für kleine Schwingungen eben durch die elementaren Methoden gegeben sind.

6. Ausführungen über das Doppelpendel. Für endliche Ausweichungen des Doppelpendels sind die in Ziff. 3 verwendeten Koordinaten x, y, also die Entfernungen von der Lotrechten durch den Aufhängepunkt, nicht geeignet. Es ist vorteilhafter, die Winkel φ, ψ der beiden Pendelfäden

als *Lagrange*sche generalisierte Koordinaten einzuführen. Die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie nehmen dann für $m = 1$ die Form an (Abb. 3)

$$T = \frac{1}{2} l^2 [\dot{\psi}^2 + 2 \cos(\psi - \varphi)\, \dot{\psi}\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2], \qquad V = -gl(\cos\psi + 2\cos\varphi). \tag{20}$$

Das Energieintegral lautet $T + V = h$. Nehmen wir als Anfangs-Koordinaten und Geschwindigkeiten, die sich auf die Punkte der Grenzkurve beziehen, die folgenden an: $\varphi = u$, $\psi = v$, $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\psi} = 0$, so nimmt die Konstante h den Wert an

$$h = -gl(\cos v + 2\cos u). \tag{21}$$

Nach der Elimination von t mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung in der *Jacobi*schen Form erhält man die Bedingungen zwischen den Winkeln φ und ψ in der Form des folgenden Variationsproblems, in der φ als unabhängig Veränderliche angesehen und zur Abkürzung $d\psi/d\varphi = \psi'$ gesetzt wird:

$$\delta \int_1^2 \sqrt{2(h - V)}\, ds = \delta \int_1^2 \sqrt{2\left[h + \frac{g}{l}(\cos\psi + 2\cos\varphi)\right]} \sqrt{\psi'^2 + 2\cos(\psi - \varphi)\,\psi' + 2}\, d\varphi = 0. \tag{22}$$

Nunmehr hat auch der Ausdruck für ds eine etwas allgemeinere Form angenommen. Wir wollen daher direkt die Bedingungen angeben, die für die Grenzkurven bestehen, indem wir von T und V folgende verallgemeinerte Formen annehmen:

$$T = \frac{1}{2}(a\dot{u}^2 + 2b\dot{u}\dot{v} + c\dot{v}^2), \quad V = V(u, v)\ ; \tag{23}$$

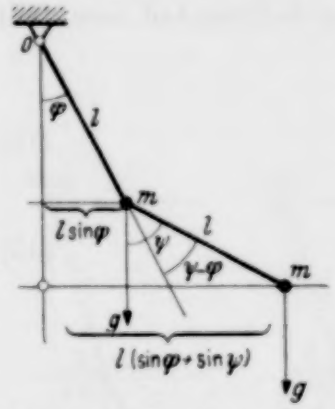

Abb. 3. Einführung von φ und ψ als generalisierte Koordinaten.

die a, b, c und V sind jetzt beliebige Funktionen von u und v. Für die Punkte der Grenzkurven verschwinden nach Bildung der *Euler*schen Gleichung die Glieder mit $\sqrt{2(h - V)}$, und mit der Bezeichnung $v' = dv/du$ bleibt die Gleichung übrig

$$v' = -\frac{b\dfrac{\partial V}{\partial u} - c\dfrac{\partial V}{\partial v}}{a\dfrac{\partial V}{\partial u} - b\dfrac{\partial V}{\partial v}}, \tag{24}$$

die unter der Annahme der verallgemeinerten Formen von T und V die Differentialgleichung für die Grenzkurven darstellt. Als Anfangswerte von v' sind wieder jene anzuführen, die sich bei kleinen Schwingungen ergeben und wie zuvor als bekannt angesehen werden können.

Für die Probleme der Eigenschwingungen des Doppelpendels für große Ausweichungen, für welche die oben angeführten Formen der kinetischen und potentiellen Energie T und V Geltung haben, erscheint v' in der folgenden Form:

$$v' = \frac{\sin(v - u)\cos u}{\sin u - \dfrac{1}{2}\sin v\cos(v - u)}. \tag{25}$$

Die angenäherte Integration dieser Gleichung für die bekannten Anfangswerte von v' in den Ruhelagen $u = 0$, $v = 0$ kann nach einer der bekannten numerischen Methoden leicht durchgeführt werden und liefert in Abb. 4 als Ergebnis der beiden mit k_1 und k_2 bezeichneten Kurven, welche die zusammengehörigen Werte der Koordinaten der Grenzkurven des Doppelpendels angeben. In Abb. 5 und 6 sind einige Zwischenlagen des Doppelpendels für die beiden Eigenschwingungen für die Werte der Winkel für die kleinere Frequenz von $\varphi = 0°$ bis etwa $\varphi = 70°$ und für die größere von $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 120°$ angegeben. Diese Ergebnisse werden auch durch Versuche bestätigt, bei denen nur zu beachten ist, daß die Pendelfäden für größere Werte der Ausschläge schlaff werden können, da sie bei solchen nicht nur Zug-, sondern auch Druckkräfte erfahren.

Zur vollständigen Lösung der hier behandelten Aufgabe gehört noch die Bestimmung der Schwingdauern für jede einzelne dieser Eigenschwingungen, d. h. für jedes Paar zugeordneter Lagen der beiden Punktmassen des Doppelpendels. Diese Bestimmung kann auch nur durch angenäherte Ermittlung der auftretenden Integrale geschehen.

Da die Schwingdauer des einfachen Punktpendels

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

und die der Grundschwingung des Doppelpendels für kleine Ausschläge

$$T_2 = 2\pi\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{26}$$

ist, so schwingt das Doppelpendel langsamer als ein einfaches mit gleicher Pendellänge l, und seine Schwingdauer verlangsamt sich weiter mit größer werdenden Ausschlägen.

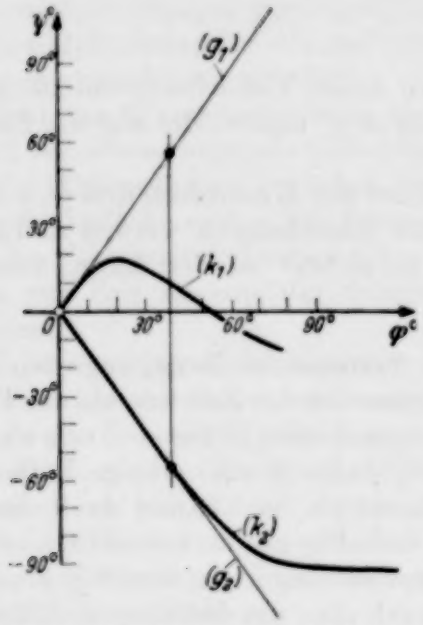

Abb. 4. Grenzkurven $\psi = \psi(\varphi)$ für das Doppelpendel.

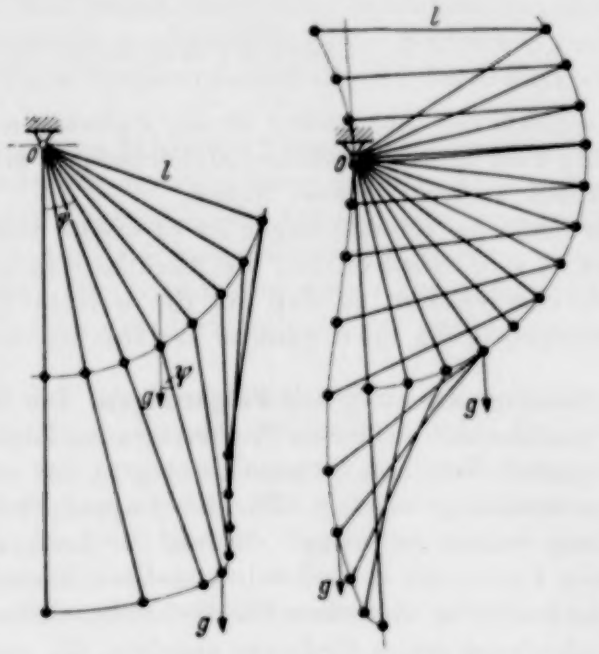

Abb. 5 und 6. Grenzlagen für die Grundschwingung und die Oberschwingung des Doppelpendels.

7. Ansatz für das Dreifach-Punktpendel. Für mehrgliedrige Schwinger werden die Ansätze naturgemäß verwickelter, bleiben aber grundsätzlich ausführbar. Wir wollen uns hier auf das Dreifach-Punktpendel beschränken und nur die Ausgangspunkte der Rechnung angeben. Die wirkliche Durchführung kann daraus unschwer entnommen werden.

Für gleiche Massen der Punkte und gleiche Längen l lauten die Bewegungsgleichungen in den Lagekoordinaten x, y, z (Abb. 7)

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = -(5x - 2y)\,\frac{g}{l}, \\ \ddot{y} = -(-2x + 3y - z)\,\frac{g}{l}, \\ \ddot{z} = -(-y + z)\,\frac{g}{l}. \end{array}\right| \tag{27}$$

Die Eigenfrequenzen (der kleinen Schwingungen) ergeben sich als die Wurzeln der Frequenzdeterminantengleichung (mit $\omega^2 l/g = p$)

$$\begin{vmatrix} p-5, & 2, & 0 \\ 2, & p-3, & 1 \\ 0 & 1, & p-1 \end{vmatrix} \equiv p^3 - 3p^2 + 18p - 6 = 0;$$

ihre Wurzeln haben (angenähert) die Werte

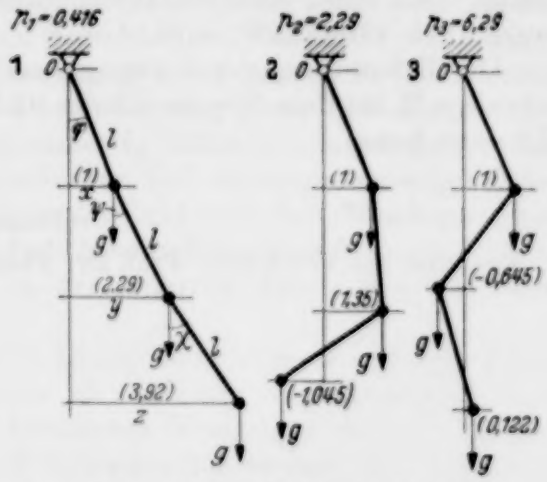

Abb. 7. Kleine Schwingungen für das Dreifach-Punktpendel.

$$p_1 = 0{,}415, \qquad p_2 = 2{,}294, \qquad p_3 = 6{,}29, \tag{28}$$

und die Ausschlagverhältnisse für die drei Hauptschwingungen sind

$$\left|\begin{array}{l} A_1 : B_1 : C_1 = 1 : 2{,}29 : 3{,}92\ , \\ A_2 : B_2 : C_2 = 1 : 1{,}35 : -1{,}045, \\ A_3 : B_3 : C_3 = 1 : -0{,}645 : 0{,}122. \end{array}\right| \tag{29}$$

Für die potentielle Energie erhält man

$$V = \frac{1}{2} x^2 - 2\,x\,y + \frac{3}{2} y^2 - y\,z + \frac{1}{2} z^2 , \tag{30}$$

und die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \dot{s}^2 . \tag{31}$$

Das zugehörige Variationsproblem in der *Jacobi*schen Form lautet, wenn x als unabhängige Veränderliche angenommen und $dy/dx = y'$, $dz/dx = z$ gesetzt wird,

$$\delta \int_1^2 \sqrt{2\,(h - V)}\, ds = \delta \int_1^2 \sqrt{2\,(h - V)}\, \sqrt{y'^2 + z'^2 + 1}\, dx = 0 . \tag{32}$$

Die Grenzkurven sind wieder als die *Euler*schen Gleichungen dieses Variationsproblems gegeben und sind zwei lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in y' und z', die nur die Lösungen $y' = \text{konst}$ und $z' = \text{konst}$ haben.

Für endliche Schwingungen ist es wieder zweckmäßig, statt der Koordinaten x, y, z die drei Winkel φ, ψ, χ einzuführen; die Ansätze und die *Euler*schen Gleichungen werden dadurch erheblich verwickelter, so daß auf die weitere Ausführung verzichtet werden kann, zumal der Rechnungsvorgang sonst ganz so verläuft wie zuvor.

8. Zusammenfassung und Folgerungen. Die Ordnung des Systems der Bewegungsgleichungen eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden kann durch Elimination der Zeit mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung — zweckmäßig in der von *Jacobi* angegebenen Form — um zwei Einheiten erniedrigt werden. Für das Doppelpendel ergibt sich dadurch eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung. Obwohl ihr Integral nicht bekannt ist, so können doch die zugeordneten Lagen der beiden schwingenden Massen auch für beliebig große Ausschläge ermittelt werden; und zwar sind diese für die beiden Scharen der Hauptschwingungen durch je eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, die angenähert durch eine der bekannten Näherungsmethoden gelöst werden können.

Dieselbe Methode ist unmittelbar auch für das Doppel-Körperpendel und — nach sinngemäßer Erweiterung — auch für mehrfache Pendel anwendbar und selbstverständlich auch für alle schwingungsfähigen Systeme verwandter Art.

Von besonderem Interesse dürfte jedoch die Tatsache sein, daß durch die angegebene Elimination der Zeit t auch das allgemeine Problem des Doppelpendels (für beliebige Anfangsbedingungen), dessen Lösung noch nicht bekannt ist, — und ähnlicher Probleme — auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt und dadurch wesentlich vereinfacht wird.

Die Behandlung der erzwungenen Schwingungen für Systeme mit endlichen Ausschlägen, wie sie z. B. bei dem System Glocke und Klöppel verwirklicht ist, erfordert jedoch eine besondere Untersuchung.

(Eingegangen am 18. Dezember 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Theodor Pöschl*, (17a) Karlsruhe i. B., Wendstr. 5, Fernruf 5414.

Schubspannungsverteilung und Energiedissipation bei turbulenten Grenzschichten.

Von J. Rotta.

1. Einleitung. Die Berechnung turbulenter Grenzschichten wird bei den meisten bisher bekannt gewordenenen Näherungsverfahren auf die Lösung von zwei simultanen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Dieses sind die v. *Kármán*sche Impulsgleichung und eine Differentialgleichung für die Änderung, die die Form der Grenzschichtprofile beim Fortschreiten in Strömungsrichtung erfährt.

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, müssen noch weitere Zusammenhänge gegeben sein. So muß vor allem, wenn als Gleichung für die Änderung der Profilform der Energiesatz eingeführt wird, die Abhängigkeit zwischen der auftretenden Dissipationsfunktion — das ist das über die Grenzschichtdicke erstreckte Integral der durch die Zähigkeit dissipierten Energie — und der Form des Geschwindigkeitsprofiles bekannt sein. Die Ermittlung dieses Zusammenhanges erscheint zur Zeit als eine der dringendsten Aufgaben auf dem Gebiete der turbulenten Grenzschichten.

In einer unlängst erschienenen Arbeit[1] hat sich der Verfasser bemüht, diese Abhängigkeit aus Versuchsergebnissen rein empirisch festzustellen. Da die Bestimmung des Dissipationsintegrals aus Versuchsergebnissen von Natur aus mit gewissen Ungenauigkeiten behaftet ist, soll in der vorliegenden Arbeit der Versuch unternommen werden, den genannten Zusammenhang theoretisch zu klären und durch erneute Sichtung vorliegenden Versuchsmaterials vermittels einer neuen Auswertungsmethode auf eine festere Grundlage zu stellen.

Die Ausführungen beschränken sich auf stationäre, zweidimensionale Grenzschichten in inkompressiblen Medien.

2. Über die Einparametrigkeit der Grenzschichtprofile. Als auffallendes Ergebnis experimenteller Untersuchungen an turbulenten Grenzschichten wurde gefunden, daß sich die Geschwindigkeitsprofile, d. h. die Verteilung der Grundströmungsgeschwindigkeit über den Wandabstand, mit guter Annäherung als einparametrige Familie darstellen lassen. Diese Eigenschaft wird bei den meisten Näherungsverfahren in Ermangelung besserer Anhaltspunkte als Arbeitshypothese eingeführt.

Nun beeinflussen bei hinreichend großen *Reynolds*zahlen die kinematische Zähigkeit ν und die geometrische Beschaffenheit der Wand (Wandrauhigkeit) die Geschwindigkeitsverteilung nur in einer im Vergleich zur Grenzschichtdicke δ sehr dünnen Schicht δ_w in Wandnähe; im übrigen Bereich der Grenzschicht erscheinen die Strömungsgrößen dagegen bei geeigneter Normierung als von der Zähigkeit und Wandrauhigkeit unabhängig. Die Beachtung dieser Erkenntnis führt dazu, nicht die ganzen Geschwindigkeitsprofile als einparametrig anzusehen, sondern nur den äußeren, von der Zähigkeit und Wandrauhigkeit unbeeinflußten Teil als einparametrige Schar aufzufassen. Es ist dann möglich, den Einfluß der *Reynolds*-Zahl und der Wandrauhigkeit näherungsweise zu berücksichtigen, ohne daß ein grundsätzlich komplizierteres Berechnungsverfahren notwendig wäre. Diese Überlegungen wurden in der zitierten Arbeit des Verfassers behandelt.

Der benötigte Zusammenhang zwischen dem erwähnten Dissipationsintegral und dem Formparameter der Geschwindigkeitsprofile kann aber nur dann als eindeutig vorausgesetzt werden, wenn zu jedem Geschwindigkeitsprofil auch eine ganz bestimmte Verteilung der statistischen Schwankungsgrößen gehört. Mit anderen Worten, es muß vorausgesetzt werden, daß sowohl die Geschwindigkeitsprofile als auch die Verteilungen der Geschwindigkeitsschwankungen und Korrelationen zwischen ihnen als einparametrige Kurvenscharen angesehen werden können. Diese Voraussetzung wird durch vorliegende Versuchsbeobachtungen gestützt, doch lassen sich die Bedingungen für ihre Gültigkeit auch theoretisch angeben.

Außer der Zulässigkeit der üblichen Grenzschichtvereinfachungen ist die erste Bedingung für den eindeutigen Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitsprofilen und der Verteilung der

[1] *J. Rotta*, Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Nr. 1. Göttingen 1950; gekürzte Darstellung Ing.-Arch. 19 (1951), S. 31.

Geschwindigkeitsschwankungen eine hinreichend große *Reynolds*zahl, denn nur dann bleibt der Bereich, in welchem die Strömungsverhältnisse unmittelbar von der Zähigkeit beeinflußt werden, klein gegen die Grenzschichtdicke. Die weitere Beurteilung, ob zu einer gewissen Verteilung der Grundströmungsgeschwindigkeit U über dem Wandabstand y auch eindeutig bestimmte Verteilungen der Geschwindigkeitsschwankungen über y gehören, erfordert die Beantwortung der Frage, wie weit der Turbulenzmechanismus nur durch die Ableitungen von U nach y gesteuert wird und wie weit auch die Verteilung von U über x (der Koordinate in Strömungsrichtung) und die senkrecht zur Wand gerichtete Geschwindigkeitskomponente V daran beteiligt sind.

Zur Untersuchung des Turbulenzmechanismus kann man sich eine Anzahl von Gleichungen herleiten, indem man die *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen für die allgemeine, zeitlich und räumlich schwankende Flüssigkeitsbewegung mit einer oder mehreren Komponenten der Geschwindigkeit multipliziert und dann eine statistische Mittelung vornimmt. Solche Entwicklungen gehen bereits auf *O. Reynolds* zurück und wurden für Produkte von drei Geschwindigkeitskomponenten von *P. Y. Chou*[1] angeschrieben. Ohne hier darauf einzugehen, welches physikalische Bild auf diese Weise von dem Turbulenzmechanismus entsteht, und welche Möglichkeiten sich zu seiner quantitativen Erfassung bieten[2], möge folgendes dargelegt werden.

Durch das Auftreten der substantiellen Ableitung der Geschwindigkeit in den *Navier-Stokes*schen Gleichungen von der Form $\partial \mathfrak{v}/dt + \mathfrak{v}\,\nabla\mathfrak{v}$, wobei $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor ist, erscheinen in den genannten Gleichungen für den Turbulenzmechanismus Glieder, die einen konvektiven Einfluß der Grundströmung auf die Turbulenzbewegung beschreiben. Bei ausgebildeten, turbulenten Strömungen durch Leitungen gleichbleibenden Querschnitts fallen diese konvektiven Glieder ohne weiteres fort, nicht aber bei Grenzschichten, wenn auch die üblichen Vereinfachungen eingeführt werden. Man hat daher von diesen Gliedern eine Einwirkung der Verteilung von U in x-Richtung und der V-Komponente auf die Turbulenzbewegung zu erwarten.

Wir wollen uns die Größenverhältnisse an Hand der Gleichung für die kinetische Energie der Schwankungen[3],

$$\underbrace{\varrho\left(U\frac{\partial E}{\partial x}+V\frac{\partial E}{\partial y}\right)}_{\text{konvektives Glied}} = \tau\frac{\partial U}{\partial y} - \varrho S - \varrho\frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{2,1}$$

klar machen, wobei E die kinetische Turbulenzenergie

$$E = \frac{\overline{u^2}+\overline{v^2}+\overline{w^2}}{2}, \tag{2,2}$$

S die Dissipation

$$S = \nu\left[\overline{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right], \tag{2,3}$$

Q die durch turbulente Vermischung in y-Richtung transportierte Energie (Energiediffusion)

$$Q = -\nu\left(\frac{\partial E}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v^2}}{\partial y}\right) + \overline{v\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+\tilde{p}/\varrho\right)}, \tag{2,4}$$

τ die Schubspannung, $\tilde{p}$ die Schwankungen des Druckes und ϱ die Dichte des Strömungsmediums sind. Die Energie E, die Dissipation S und die Energiediffusion Q werden auf die Masseneinheit der Flüssigkeit bezogen.

Nun hat die Komponente V bekanntlich die Größenordnung $U_1\,d\delta/dx$, ebenso ist

$$\partial E/\partial x \sim (\partial E/\partial y)\,(d\delta/dx),$$

wenn U_1 die Größe von U am Außenrand der Grenzschicht ist. Hieraus folgt, daß $U\partial E/\partial x$ und $V\partial E/\partial y$ etwa von gleicher Größenordnung sind; das konvektive Glied in (2,1) hat insgesamt die Größenordnung

$$\varrho\,U_1\frac{\partial E}{\partial y}\frac{d\delta}{dx}.$$

---

[1] *P. Y. Chou*, Quarterly of Appl. Math. 3 (1945), S. 38.

[2] Vgl. hierzu *J. Rotta*, Z. Physik 129 (1951), S. 547; 131 (1951), S. 51.

[3] Gl. (3,4) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit. Wie früher bezeichnen die großen Buchstaben die zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten, die kleinen Buchstaben bezeichnen dagegen die Geschwindigkeitsschwankungen, deren Mittelwerte gleich Null sind. Überstreichungen der Schwankungsgrößen bedeuten zeitliche Mittelung.

Aus dem Vergleich dieses Wertes mit dem Diffusionsglied

$$\varrho \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho v \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \dots\right),$$

folgt, daß das konvektive Glied in (2,1) nur dann klein gegen das Diffusionsglied (oder gegen eines der anderen Glieder in (2,1)) und somit vernachlässigbar ist, wenn die Bedingung

$$\frac{d\delta}{dx} \ll \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{U_1} \tag{2,5}$$

erfüllt ist; denn es ist größenordnungsmäßig

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho v \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right) \sim \varrho \sqrt{\overline{v^2}} \frac{\partial E}{\partial y}.$$

Die Größe $\sqrt{\overline{v^2}}/U_1$ ist aber erfahrungsgemäß selbst klein gegen 1.

Außer daß die *Reynolds*zahl hinreichend groß ist, muß also weiter die Änderung der Grenzschichtdicke in Strömungsrichtung $d\delta/dx$ von zweiter Ordnung klein gegen 1 sein, während für die Zulässigkeit der üblichen Grenzschichtvereinfachungen nur erforderlich ist, daß $d\delta/dx$ von erster Ordnung klein gegen 1 ist. Dies soll heißen, um einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsprofil und der Verteilung der Schwankungsgeschwindigkeiten annehmen zu dürfen, muß $d\delta/dx$ etwa eine Zehnerpotenz kleiner sein, als es für die Annahme der von *L. Prandtl* eingeführten Vereinfachungen bei gleichen Genauigkeitsansprüchen notwendig ist. Für die praktische Grenzschichtrechnung vermittels Impuls- und Energiesatz sind die Anforderungen allerdings nicht ganz so scharf. Anstatt einer strengen Einparametrigkeit der Geschwindigkeitsprofile und Schwankungsverteilungen ist nur ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Dissipationsintegral und dem Formparameter für das Geschwindigkeitsprofil notwendig. Beides sind integrierte Größen, bei denen sich mäßige Abweichungen in den normierten Verteilungen noch nicht merkbar auswirken, so daß diese Voraussetzung viel leichter erfüllbar ist.

Bei den in der Regel vorliegenden Verhältnissen bei turbulenten Grenzschichten ist $d\delta/dx$ von der Größenordnung 0,01 bis 0,02, so daß damit der experimentell beobachtete eindeutige Zusammenhang zwischen Schwankungs- und Grundgeschwindigkeitsverteilungen erklärlich ist. In der Nähe der turbulenten Ablösestelle ist $d\delta/dx$ allerdings keineswegs von höherer Ordnung klein gegen 1, so daß hier bei Anwendung der einparametrigen Berechnungsverfahren keine Treffsicherheit mehr gewährleistet werden kann.

3. Näherungsansatz für die Schubspannungsverteilung. Die je Zeit- und Längeneinheit dissipierte Energie steht in engem Zusammenhang mit der Schubspannungsverteilung. Die genaue Kenntnis dieser Verteilung würde zweifellos für die Berechnung turbulenter Grenzschichten einen bedeutenden Fortschritt bedeuten, und es ist daher schon mehrfach versucht worden, sie aus Versuchen oder theoretisch zu ermitteln.

K. Fediaevsky macht in seiner Arbeit[1] einen Polynomansatz und fordert insbesondere, daß die Schubspannungsverteilung die aus der Grenzschichtgleichung und Kontinuitätsgleichung folgenden Wandbedingungen

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0 \tag{3,1}$$

erfüllt. Nun ist die Schubspannung außer in der meistens sehr dünnen Schicht in Wandnähe, in der die Strömungsverhältnisse unter dem vorherrschenden Einfluß der Zähigkeit stehen, durch die Beziehung

$$\tau = -\varrho \overline{uv} \tag{3,2}$$

gegeben. Sehen wir die im vorigen Abschnitt untersuchte Annahme, nach welcher zu jedem Geschwindigkeitsprofil eine bestimmte Verteilung der statistischen Schwankungen gehört, als gültig an, so ist jedem Geschwindigkeitsprofil ein bestimmtes $\overline{uv}$-Profil und mithin auch ein bestimmtes Schubspannungsprofil zuzuordnen. Diese Annahme ist aber nicht mit den Wandbedingungen (3,1) verträglich, außer wir würden jedem örtlichen Druckgradienten ein bestimmtes Geschwindigkeitsprofil zuordnen. Letztere Methode, die dem Berechnungsverfahren von *A. Buri*[2]

[1] *K. Fediaevsky*, J. Aeron. Sciences 4 (1937), S. 491.

[2] *A. Buri*, Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Dissertation. Zürich 1931.

zugrunde liegt, hat sich jedoch nur beschränkt als brauchbar erwiesen. Im Abschnitt 7 werden wir auf diese Frage näher eingehen.

Wir werden die Bedingungen (3,1) also zunächst außer acht lassen, ohne ihre Exaktheit irgendwie in Zweifel ziehen zu wollen. Für das Geschwindigkeitsprofil hatte sich der Näherungsansatz[1]

$$\frac{U_1 - U}{v^*} = \frac{A}{\varkappa}(1-\eta) - \frac{1}{\varkappa}\ln\eta \quad \text{für } \frac{\delta w}{\delta} < \eta \leq 1 \tag{3,3}$$

als brauchbar gezeigt. Dabei ist

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \tag{3,4}$$

$v^* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ die mit der Wandschubspannung τ_0 gebildete Schubspannungsgeschwindigkeit, $\varkappa$ eine universelle Konstante ($\varkappa = 0{,}4$), A der Profilparameter und δ_w die Dicke der von Zähigkeit und Wandrauhigkeit beeinflußten Unterschicht. Dieser Ansatz stellt das Geschwindigkeitsprofil im Mittel ganz gut dar, ohne daß er mit der sich aus den Grenzschichtgleichungen ergebenden Reihenentwicklung von der Wand aus genau übereinstimmt. Bei der Suche nach einem Ansatz für die zugehörige Schubspannungsverteilung scheint deshalb die Außerachtlassung der Wandbedingungen berechtigt zu sein.

Wir machen wie *Fediaevsky* einen Potenzreihenansatz von der Form

$$\frac{\tau}{\tau_0} = -\frac{\overline{u\,v}}{v^{*2}}\left(\text{für } \eta > \frac{\delta w}{\delta}\right) = 1 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots, \tag{3,5}$$

nehmen aber statt der Wandbedingungen (3,1) einen linearen Zusammenhang zwischen a_1 und A an:

$$a_1 = \alpha\,(A - A_0). \tag{3,6}$$

Der lineare Zusammenhang zwischen a_1 und A ist theoretisch begründet. Wollte man z. B. mit einem Differentialgleichungssystem für den Turbulenzmechanismus, wie es in den zitierten Arbeiten[2] entwickelt wurde, unter Vernachlässigung der konvektiven Glieder die zu der Geschwindigkeitsverteilung (3,3) gehörige Schubspannungsverteilung berechnen, so käme man tatsächlich auf einen linearen Zusammenhang zwischen a_1 und A. Eine einfache quantitative Abschätzung läßt sich mit dem *Prandtl*schen Mischungswegansatz

$$\tau = \varrho\, l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dU}{dy} \tag{3,7}$$

machen. Verwendet man dabei für den Mischungsweg l den Ähnlichkeitsansatz nach *v. Kármán*,

$$l = \varkappa \left|\frac{dU/dy}{d^2U/dy^2}\right|, \tag{3,8}$$

so bekommt man $a_1 = 4\,A$, also $\alpha = 4$.

In (3,6) ist A_0 diejenige Größe von A, die für die Darstellung des Profiles für die turbulente Grenzschicht ohne Druckgefälle zu wählen ist ($A_0 \sim 0{,}9$). Hierdurch wird erreicht, daß bei $dp/dx = 0$ sich $a_1 = 0$ ergibt, wie es der Theorie und den Beobachtungen entspricht. Abgesehen von der Abschätzung mit dem Mischungswegansatz soll die Proportionalitätskonstante α auf empirische Weise bestimmt werden.

Als weitere Annahme zur Bestimmung der Koeffizienten in (3,5) wählen wir für

$$\eta = 1 : \tau = 0\,, \qquad \frac{d\tau}{d\eta} = 0. \tag{3,9}$$

Diese Bedingungen begründen sich damit, daß die quadratischen Mittelwerte der Geschwindigkeitsschwankungen, $\overline{u^2}$ usw., und damit auch $\overline{uv}$ am Außenrand der Grenzschicht asymptotisch auf Null abfallen. Versuchsbeobachtungen[3] zeigen weiter, daß auch der Korrelationskoeffizient $\overline{u\,v}/\sqrt{\overline{u^2}\,\overline{v^2}}$ am Außenrand der Grenzschicht auf Null abfällt, so daß der Mittelwert des Produktes $\overline{u\,v}$ am Außenrand von höherer Ordnung gegen Null geht als die Schwankungsquadrate $\overline{u^2}$ und $\overline{v^2}$. Hiernach wäre es berechtigt, für $\eta = 1$ auch noch die Bedingung

$$\frac{d^2\tau}{d\eta^2} = 0 \tag{3,10}$$

---

[1] Gl. (6,14) der Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.

[2] Fußnote 2, von S. 196.

[3] *G. B. Schubauer* und *P. S. Klebanoff*, Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer, NACA T. N. 2133 (1950).

vorzuschreiben. Diese Vorschrift scheint allerdings etwas zu streng zu sein, weil der Ansatz (3,3) wegen des scharfkantigen Überganges in die freie Strömung eine etwas zu kleine Grenzschichtdicke δ, bezogen auf die Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy, \tag{3,11}$$

oder auf die Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{U_1}\left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy, \tag{3,12}$$

ergibt. Vergleichsweise soll deshalb die Schubspannungsverteilung ohne und mit Bedingung (3,10) untersucht werden, wobei der Ansatz (3,5) im ersten Fall ein Polynom dritten Grades ist, während im zweiten Fall ein Polynom vierten Grades angesetzt wird. Die Koeffizienten a_2, a_3, a_4 lassen sich dann in Abhängigkeit von a_1 ausrechnen:

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ \frac{d^2\tau}{dy^2} + 0 \text{ für } \eta = 1: \\
&\quad a_2 = -(3 + 2\,a_1), \\
&\quad a_3 = 2 + a_1, \\
&\quad a_4 = 0, \\
&(2)\ \frac{d^2\tau}{dy^2} = 0 \text{ für } \eta = 1: \\
&\quad a_2 = -(6 + 3\,a_1), \\
&\quad a_3 = 8 + 3\,a_1 \\
&\quad a_4 = -(3 + a_1).
\end{aligned}\right\} \tag{3,13}$$

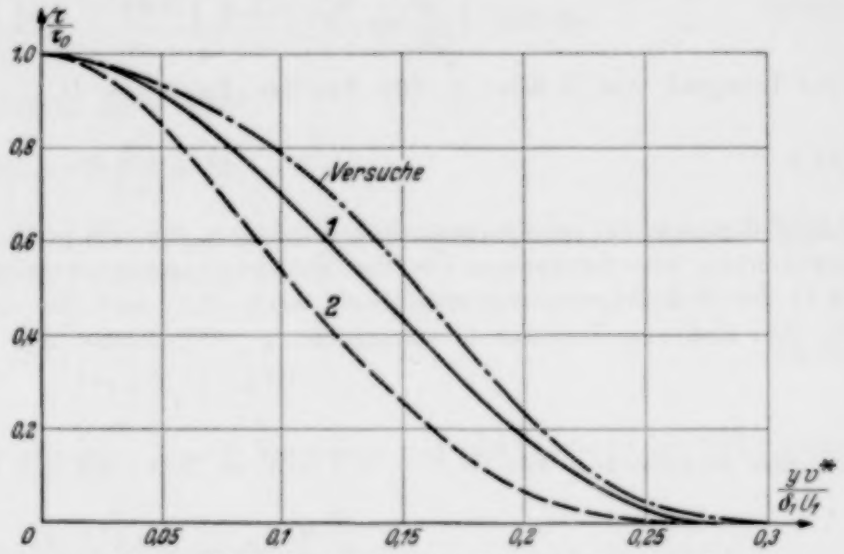

Abb. 1. Schubspannungsverteilung bei konstantem Druck. Rechnungsannahme: $a_1 = 0$; $A = 0{,}9$. Versuche nach *F. Schultz-Grunow*.

In Abb. 1 sind die Schubspannungsverteilungen τ/τ_0 für die Grenzschicht mit konstantem Druck

$$(a_1 = 0, \quad A_0 = 0{,}9)$$

über der dimensionslosen Abszisse $y\,v^*/\delta_1 U_1$ dargestellt und mit der aus Versuchen von *F. Schultz-Grunow*[1] errechneten Verteilung verglichen. Die Abszissen errechnen sich zu[2]

$$\frac{y\,v^*}{\delta_1 U_1} = \frac{\varkappa}{1 + \frac{1}{2}A}\,\eta\,. \tag{3,14}$$

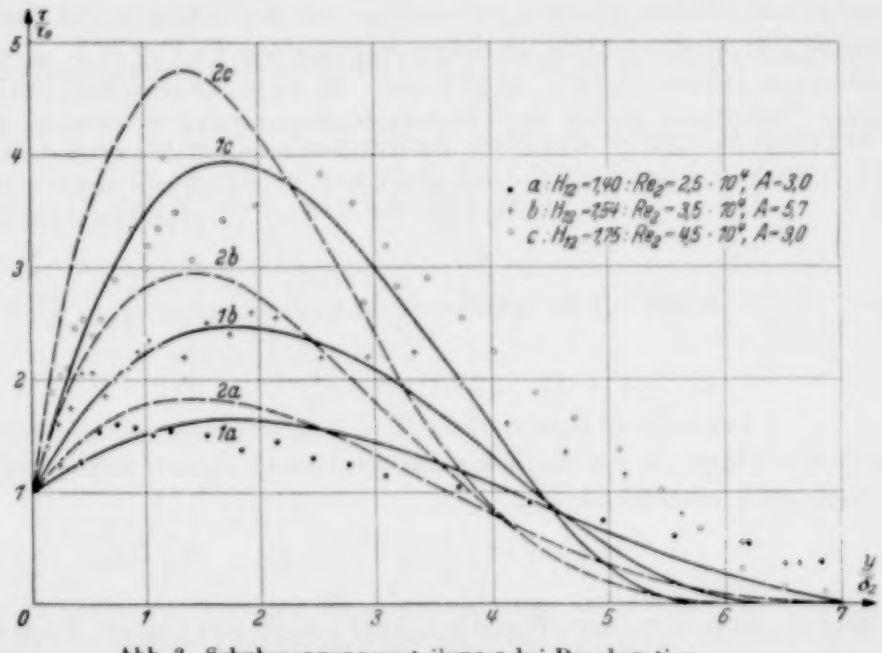

Abb. 2. Schubspannungsverteilungen bei Druckanstieg. Kurven a_1, b_1, c_1: Rechnungsannahme (1); $\varkappa = 2{,}57$. Kurven a_2, b_2, c_2: Rechnungsannahme (2); $\varkappa = 4{,}53$. Versuchspunkte nach *G. B. Schubauer* und *P. S. Klebanoff*.

Bei positivem a_1 ergeben sich Verteilungen, die qualitativ den Versuchsbeobachtungen entsprechen, wie aus Abb. 2 zu ersehen ist. Bei dieser Auftragung wurden für vorgegebene Werte $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ und $Re_2 = U_1\delta_2/\nu$ mit den Beziehungen der erwähnten Arbeit[3] zunächst die Werte A ermittelt und dann unter Vorwegnahme der Resultate des Abschnitts 6 mit $\varkappa = 2{,}57$ im ersten Fall und $\varkappa = 4{,}53$ im zweiten Fall die τ/τ_0-Verteilungen berechnet und über y/δ_2 aufgetragen.

---

[1] *F. Schultz-Grunow*, Luftf.-Forschg. 17 (1940), S. 239.
[2] Vgl. Gl. (6,15) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[3] Fußnote 1 von S. 195, Gl. (6,3), (6,9), (6,16) und (6,19).

In diese Darstellung wurden die entsprechenden Versuchspunkte nach *G. B. Schubauer* und *P. S. Klebanoff*[1] eingetragen, die vermittels einer Hitzdrahtsonde gemessen wurden.

Aus den Versuchsergebnissen muß man mit einiger Sicherheit schließen, daß sich die Schubspannungen über eine größere Schichtdicke erstrecken als die Abweichungen zwischen der Grundströmungsgeschwindigkeit U und der Potentialströmungsgeschwindigkeit U_1. Diese Tatsache ließe sich durch entsprechende Änderung der Annahme (3,9) bzw. (3,10) mühelos berichtigen. Wir wollen die Betrachtungen über die Schubspannungsverteilungen hauptsächlich dazu benutzen, den Zusammenhang des schon erwähnten Dissipationsintegrals mit dem Profilparameter A zu ergründen; für diesen Zweck wird die vorgeschlagene Näherung als ausreichend erachtet. Die Annahmen für den ersten Fall passen offensichtlich etwas besser.

4. Energiedissipation. Aus der Energiebilanz (2,1) ergibt sich durch Integration über die Grenzschichtdicke

$$\int_0^\infty \tau \frac{dU}{dy}\, dy = \varrho \int_0^\infty S\, dy + \varrho \frac{d}{dx} \int_0^\infty U E\, dy\,. \tag{4,1}$$

Das Integral von S über y, für das der Ausdruck D,

$$D = \int_0^\infty S\, dy \tag{4,2}$$

eingeführt wurde, ist die gesuchte Funktion, die wir jetzt unter Benutzung der im Abschnitt **3** gemachten Abschätzungen für die Schubspannungsverteilung berechnen wollen. Setzt man in (4,1) die Schubspannungsverteilung nach (3,5) und die Geschwindigkeitsverteilung nach (3,3) für den äußeren Teil der Grenzschicht $\eta > \delta_w/\delta$ bzw. das Wandgesetz[2]

$$\frac{U}{v^*} = f\left(\frac{y\, v^*}{\nu}\right) \tag{4,3}$$

für den wandnahen Teil $0 < \eta \ll 1$ ein, so läßt sich die Quadratur für

$$\int_0^\infty \frac{dU}{dy}\, dy = \tau_0 \int_0^1 \frac{\tau}{\tau_0} \frac{dU}{d\eta'}\, d\eta' \tag{4,4}$$

ausführen. Dabei machen wir wieder von der schon in der früheren Arbeit vorgenommenen Aufteilung der Grenzschicht in einen wandnahen Teil ($0 \leq \eta' \leq \eta$) und einen äußeren Teil ($\eta' \geq \eta$) Gebrauch, wobei $\delta_w/\delta < \eta \ll 1$ sei. In dem wandnahen Teil kann man die Schubspannung in erster Näherung gleich der Wandschubspannung τ_0 setzen; auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \tau_0 \int_0^1 \frac{\tau}{\tau_0} \frac{dU}{d\eta}\, d\eta' &= \tau_0 \int_0^\eta \frac{dU}{d\eta'}\, d\eta' + \tau_0 \int_\eta^1 \frac{\tau}{\tau_0} \frac{dU}{d\eta'}\, d\eta' \\ &\approx \tau_0 U(\eta) + \tau_0 v^* \left[-\frac{1}{\varkappa} \ln \eta + \frac{1}{\varkappa}\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} \cdots\right)\right. \\ &\left. + \frac{A}{\varkappa}\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} + \cdots\right)\right]. \end{aligned} \tag{4,5}$$

In dem Gebiet, in welchem die Integrationsgrenze η liegen soll, gilt das universelle Wandgesetz[3] turbulenter Strömungen

$$U = v^*\left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + C\right) = v^*\left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* \delta}{\nu} + \frac{1}{\varkappa} \ln \eta + C\right), \tag{4,6}$$

wobei C eine von der Wandbeschaffenheit abhängige Konstante ist. Wir wollen der Kürze wegen noch

$$I_r = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \cdots + A\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} + \cdots\right) \tag{4,7}$$

[1] Fußnote 3 von S. 198. Diese Messungen sind die einzigen ihrer Art, die bekannt geworden sind. Die daraus extrapolierten Wandschubspannungen zeigen erhebliche Abweichungen von den Feststellungen anderer Autoren, so daß Zweifel an der quantitativen Richtigkeit aufkommen. Der Vergleich (Abb. 2), kann daher nur qualitativ bewertet werden.

[2] Gl. (4,7) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.

[3] Vgl. *J. Rotta*, Ing.-Archiv 18 (1950), S. 277.

einführen. Nach Einsetzen von (4,6) folgt dann aus (4,5) mit (3,14) und $Re_1 = U_1 \delta_1 / \nu$

$$\int_0^\infty \tau \frac{dU}{dy}\, dy = \varrho\, v^{*3}\left(\frac{1}{\varkappa} \ln Re_1 - \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{1+\frac{1}{2}A}{\varkappa} + \frac{I_\pi'}{\varkappa} + C\right). \tag{4,8}$$

Mit (3,13) ist für die beiden untersuchten Annahmen

$$\begin{aligned} &(1)\ I_\pi = -\frac{5}{6} + \frac{a_1}{3} + A\left(\frac{1}{2} + \frac{a_1}{12}\right), \\ &(2)\ I_\pi = -\frac{13}{12} + \frac{a_1}{4} + A\left(\frac{2}{5} + \frac{a_1}{20}\right). \end{aligned} \tag{4,9}$$

Für das Dissipationsintegral D ergibt sich dann aus (4,1)

$$D = v^{*3}\left(\frac{1}{\varkappa} \ln Re_1 - \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{1+\frac{1}{2}A}{\varkappa} + \frac{I_\pi}{\varkappa} + C\right) - \frac{d}{dx}\int_0^\infty UE\, dy\,. \tag{4,10}$$

Früher wurde für das Dissipationsintegral die Form[1]

$$D = v^{*3}\left(\frac{1}{\varkappa} \ln Re_1 + G\right) \tag{4,11}$$

angegeben. Die dimensionslose Differenz $G - C$ ist unter der eingeführten Voraussetzung der Einparametrigkeit nur eine Funktion des Profilparameters

$$I_1 = \int_0^\infty \left[\frac{U - U_1}{v^*}\right]^2 d\left(\frac{y\, v^*}{\delta_1 U_1}\right) \tag{4,12}$$

und wurde empirisch aus Versuchen bestimmt. Durch Vergleich von (4,11) mit (4,10) bekommen wir jetzt für G die Beziehung

$$G = C - \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{1+\frac{1}{2}A}{\varkappa} + \frac{I_\pi}{\varkappa} - \frac{1}{v^{*3}} \frac{d}{dx}\int_0^\infty UE\, dy \tag{4,13}$$

Wenn man hierbei die Größe der Turbulenzenergiestromänderung $\frac{d}{dy}\int_0^\infty UE\, dy$ als Funktion von A ausdrücken kann, dann hat man den gesuchten Zusammenhang zwischen G und A qualitativ gefunden. Als Unbekannte tritt nur noch die Größe α von (3,6) auf. Zwischen den Formparametern I_1 und A besteht der Zusammenhang[2]

$$I_1 = \frac{2 + \frac{3}{2}A + \frac{1}{3}A^2}{\varkappa\left(1 + \frac{1}{2}A\right)}. \tag{4,14}$$

5. Turbulenzenergiestrom. Zwischen der Änderung des Turbulenzenergiestromes

$$\frac{1}{v^{*3}} \frac{d}{dx}\int_0^\infty UE\, dy$$

und dem Profilparameter A besteht kein eindeutiger Zusammenhang. Eine Abschätzung ist für die sog. ähnlichen Lösungen möglich. Diese Lösungen wurden vom Verfasser behandelt und sind dadurch ausgezeichnet, daß das Geschwindigkeitsprofil längs der Wand nur affin verzerrt wird; sie existieren für vorgegebene Geschwindigkeitsverteilungen von der Form

$$U_1 = a x^m, \tag{5,1}$$

wobei a und m konstant sind. Die Dicke der Grenzschicht wächst dabei linear mit der Ent-

[1] Gl. (6,26) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[2] Gl. (6,16) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.

fernung x. Für die Impulsverlustdicke gilt[1]

$$\delta_2 = x \frac{\left(\frac{v^*}{U_1}\right)^2}{(2m + 1 + m H_{12})}, \tag{5,2}$$

dagegen ist v^*/U_1 von x unabhängig. Für gegebene *Reynolds*zahlen Re_1 stehen m einerseits und v^*/U_1, H_{12} und damit A andererseits in eindeutigem Zusammenhang miteinander, der allerdings nicht explizit hingeschrieben werden kann.

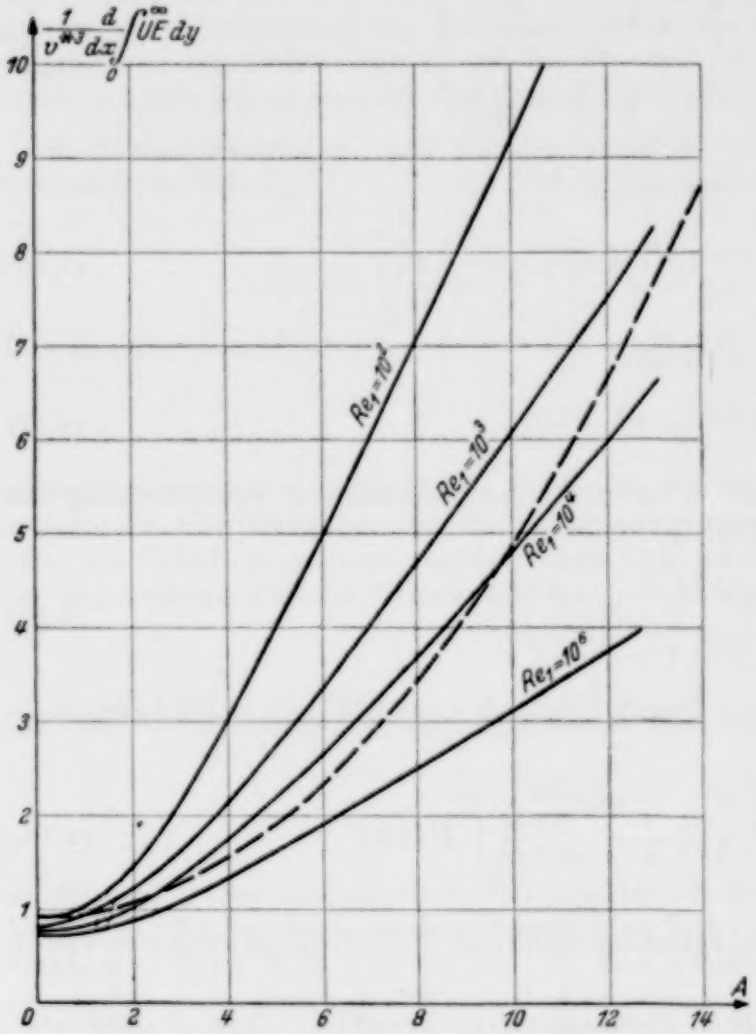

Abb. 3. Turbulenzenergiestrom bei ähnlichen Lösungen. Gestrichelte Kurve: Näherung nach (5,5).

Zur Abschätzung des Turbulenzenergiestromes wurde die Formel[2]

$$\int_0^\infty UE\,dy = 0{,}65\,\delta_1 U_1^2 v^* \tag{5,3}$$

angegeben. Eine Verbesserung dieser Beziehung wäre möglich, wenn ähnliche Überlegungen, wie sie zur Ermittlung der Schubspannungsverteilung angestellt wurden, auf die Verteilung der Schwankungsenergie angewendet würden. Da die Wirkung des Turbulenzenergiestromes jedoch von nur geringer Bedeutung ist, wollen wir von einer solchen Verfeinerung absehen und uns weiterhin der Formel (5,3) bedienen. Führt man darin (5,1) und (5,2) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{v^{*3}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty UE\,dy = 0{,}65\,\frac{(1+3m)\,H_{12}}{(2m+1+mH_{12})}. \tag{5,4}$$

In Abb. 3 ist dieser Wert für verschiedene Re_1 über A aufgetragen. Da dieses Glied, wie schon erwähnt, nur geringen Anteil am Energiegleichgewicht und deshalb in (4,13) nur die Bedeutung eines Korrekturgliedes hat, wird es für den qualitativen Zusammenhang zwischen G und A ohne weiteres statthaft sein, die Ergebnisse der ähnlichen Lösungen auf den allgemeinen Fall beliebigen Druckverlaufes zu übertragen. Wir wollen es darüber hinaus sogar als zulässig erachten, die Turbulenzenergiestromänderung in (4,13) durch die in Abb. 3 gestrichelt eingezeichnete Kurve

$$\frac{1}{v^{*3}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty UE\,dy = 0{,}9 + 0{,}04\,A^2 \tag{5,5}$$

anzunähern.

6. Auswertung von Versuchsergebnissen. Die Ermittlung des Dissipationsintegrals aus gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen in Grenzschichten ist nur über eine Differentiation möglich. Deshalb dürfte die in der früheren Arbeit durchgeführte Auswertung der Versuchsergebnisse hinsichtlich der Zuverlässigkeit nicht voll befriedigen. Nachdem wir in den vorhergegangenen Abschnitten den Zusammenhang zwischen dem Dissipationsintegral D und dem Geschwindigkeitsprofil bis auf eine empirische Konstante α festgelegt haben, ist es unter Benutzung der Beziehung (4,13) mit (4,9) und (5,5) jetzt möglich, die Auswertung auf Quadraturen zurückzuführen, wobei sich die versuchsbedingten Streuungen der Versuchsergebnisse zweifellos

[1] Gl. (7,4) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[2] Gl. (6,22) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.

nicht so störend auswirken wie bei dem erstgenannten Verfahren. Man erhält dabei für jede Meßreihe einen „gemittelten" α-Wert.

Bevor wir uns dieser Auswertung zuwenden, wollen wir kurz das Dissipationsintegral bei der Platte ohne Druckgefälle mit den Versuchsergebnissen von *F. Schultz-Grunow*[1] vergleichen, die noch nach der alten Differentiationsmethode ausgewertet wurden. Mit der Beziehung

$$\frac{U_1}{v^*} = \frac{1}{\varkappa} \ln Re_1 + B, \quad (6{,}1)$$

wobei[2]

$$\left.\begin{aligned} B &= C + 0{,}82\,\frac{A}{\varkappa} \\ &\quad - \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{1 + \frac{1}{2} A}{\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (6{,}2)$$

ist, läßt sich D nach (4,11) auf die Form

$$D = v^{*3} \left(\frac{U_1}{v^*} + F \right) \quad (6{,}3)$$

bringen. Hierin ist mit (5,5)

$$\left.\begin{aligned} F = G - B &= \frac{I_\tau - 0{,}82\,A}{\varkappa} \\ &\quad - 0{,}9 - 0{,}04\,A^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (6{,}4)$$

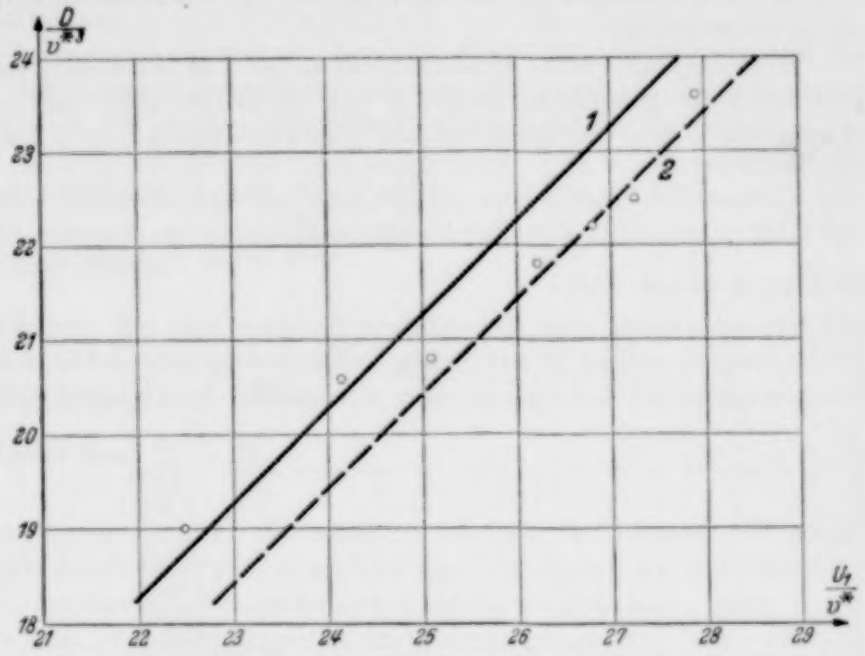

Abb. 4. Dissipationsintegral bei konstantem Druck in Abhängigkeit von U_1/v^*.
Kurve *1*: Rechnungsannahme (1): $F = -3{,}736$ } $\varkappa = 0{,}4$;
Kurve *2*: Rechnungsannahme (2): $F = -4{,}586$ } $A = 0{,}9$.

Bei der Platte ohne Druckgefälle ist der Wert von F wegen $a_1 = 0$ von der Konstanten α unabhängig und ergibt sich mit $A_0 = 0{,}9$ und $\varkappa = 0{,}4$ bei den unterschiedlichen Annahmen für die Schubspannungsverteilung zu

$$\left.\begin{aligned} (1) \qquad F &= -3{,}736, \\ (2) \qquad F &= -4{,}586. \end{aligned}\right\} \quad (6{,}5)$$

Die entsprechenden Geraden sind in Abb. 4 eingetragen und zeigen befriedigende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Die neuere Auswertung geht auch von dem Energie-Integralsatz für Grenzschichten keilförmiger Strömungen aus[3]:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (U_1^3 \delta_3) + \frac{1}{2} \frac{U_1^3 \delta_3}{x_0 + x} = D + \frac{d}{dx} \int_0^\infty UE\, dy + \frac{\int_0^\infty UE\, dy}{x + x_0} \quad (6{,}6)$$

Hierbei ist

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{U}{U_1} \left[1 - \left(\frac{U}{U_1} \right)^2 \right] dy \quad (6{,}7)$$

die Energieverlustdicke. Eliminiert man die Entfernung $x + x_0$ der Meßstelle von dem gemeinsamen Schnittpunkt der Stromlinien mit Hilfe des von *A. Kehl*[4] für Keilströmung gegebenen Impulssatzes

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \left(\frac{1}{x_0 + x} + \frac{H_{12} + 2}{U_1} \frac{dU_1}{dx} \right) = \left(\frac{v^*}{U_1} \right)^2, \quad (6{,}8)$$

so erhält man nach Einführung von

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}, \quad (6{,}9)$$

$$T = \frac{2}{U_1^3 \delta_2} \int_0^\infty UE\, dy = 1{,}3\, \frac{v^*}{U_1}\, H_{12} \quad (6{,}10)$$

[1] Fußnote 1 von S. 199.
[2] Gl. (6,9) und (6,19) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[3] Gl. (6,28) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[4] *A. Kehl*, Ing.-Arch. 13 (1943), S. 293.

und Multiplikation mit $2/U_1^3$

$$\delta_2 \frac{d}{dx}(H_{32} - T) = (H_{32} - T)(H_{12} - 1)\frac{\delta_2}{U_1}\frac{dU_1}{dx} + \frac{2D}{U_1^3} - (H_{32} - T)\left(\frac{v^*}{U_1}\right)^2. \qquad (6{,}11)$$

Die Auswertung ist also bei Keilströmung von der Größe des Keilwinkels unabhängig; daher haben auch Sekundärströmungen in der Grenzschicht in erster Näherung keinen Einfluß auf das Auswerteergebnis.

Setzt man in (6,11) D nach (6,3) unter Berücksichtigung von (6,4), (4,9) und (3,6) ein, und löst nach der gesuchten Größe α auf, so erhält man mit $\varkappa = 0{,}4$ und $A_0 = 0{,}9$, wenn sich die Auswertung der Grenzschicht auf das Interval $a \leq x \leq b$ erstreckt, im ersten Fall

$$(1)\ \alpha = \frac{-\ln\frac{(H_{32}-T)_a}{(H_{32}-T)_b} + J_U + 2{,}983\,J_1 + 0{,}800\,J_2 + 0{,}04\,J_3 - J_4}{-0{,}750\,J_1 + 0{,}646\,J_2 + 0{,}2083\,J_3} \qquad (6{,}12)$$

und im zweiten Fall

$$(2)\ \alpha = \frac{-\ln\frac{(H_{32}-T)_a}{(H_{32}-T)_b} + J_U + 3{,}608\,J_1 + 1{,}050\,J_2 + 0{,}04\,J_3 - J_4}{-0{,}563\,J_1 + 0{,}513\,J_2 + 0{,}125\,J_3}. \qquad (6{,}13)$$

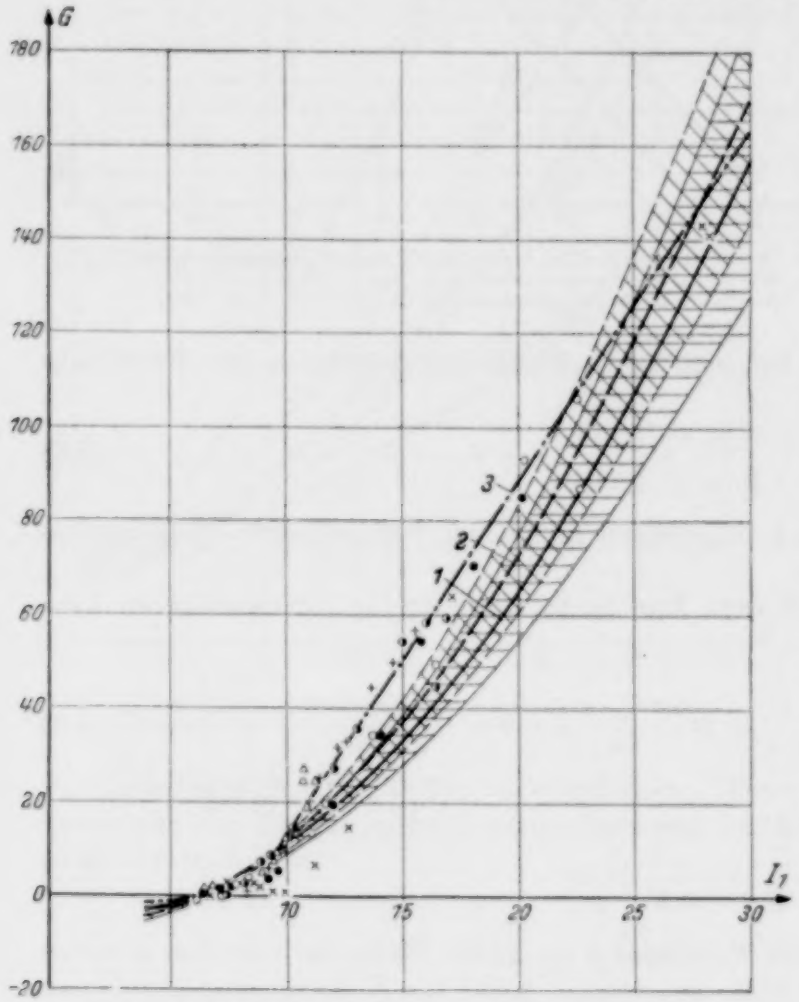

Abb. 5. Größe G des Dissipationsintegrals in Abhängigkeit des Formparameters I_1.
Kurve 1: Rechnungsannahme (1): $\alpha = 2{,}57 \pm 0{,}45$ | $C = 5{,}2$; $\varkappa = 0{,}4$; $A_0 = 0{,}9$.
Kurve 2: Rechnungsannahme (2): $\alpha = 4{,}53 \pm 0{,}65$ |
Kurve 3: Früher vorgeschlagener Verlauf.
Versuchspunkte nach früherer Auswertung.
Schraffierte Gebiete stellen mittlere Streubereiche dar.

Hierbei bedeuten

$$J = \int_{U_{1b}}^{U_{1a}} \frac{H_{12}-1}{U_1}\,dU_1,$$

$$J_1 = \int_a^b 2\left(\frac{v^*}{U_1}\right)^3 \frac{dx}{(H_{32}-T)\,\delta_2},$$

$$J_2 = \int_a^b 2\left(\frac{v^*}{U_1}\right)^3 \frac{A\,dx}{(H_{32}-T)\,\delta_2}, \qquad (6{,}14)$$

$$J_3 = \int_a^b 2\left(\frac{v^*}{U_1}\right)^3 \frac{A^2\,dx}{(H_{32}-T)\,\delta_2},$$

$$J_4 = \int_a^b \left(\frac{v^*}{U_1}\right)^2 \left(\frac{2}{H_{32}-T} - 1\right)\frac{dx}{\delta_2}.$$

Die Auswertung von 15 verschiedenen Meßreihen[1] nach dieser Methode ergab im Mittel für den ersten Fall

(1) $\alpha = 2{,}57$ mit einer mittleren Streuung von $\pm 0{,}45$

und für den zweiten Fall

(2) $\alpha = 4{,}53$ mit einer mittleren Streuung von $\pm 0{,}65$.

Diese Werte stimmen größenordnungsmäßig mit der Abschätzung nach dem Mischungswegansatz, bei der wir $\alpha = 4$ fanden, überein.

Den mittleren Verlauf der Funktion G nebst ihrem mittleren Streubereich über dem Formparameter I_1 zeigt Abb. 5 für $C = 5{,}2$. Zum Vergleich sind die Versuchspunkte der alten Auswertung und die damals vorgeschlagene Kurve mit eingetragen. Die neuen Kurven liegen etwas

[1] Es handelt sich um z.T. unveröffentlichte Meßreihen aus dem MPI f. Strömungsforschung und um Meßreihen der Schrifttumsstellen, Fußnote 3, S. 198; Fußnote 4, S. 203 und *A. E. v. Doenhoff* und *N. Tetervin*, Determination of General Relations for the Behavior of Turbulent Boundary Layers, NACA Report No. 772 (1943).

tiefer, bestätigen jedoch die früheren Auswertungsergebnisse im großen und ganzen. Die Streuungen sind aber auch bei dieser Methode erheblich. Nun sind die Sekundärströmungseinflüsse bei der Auswertung zwar in erster Näherung eliminiert worden, doch kennt man nicht die Größe des verbleibenden Restes, so daß man nicht sagen kann, inwieweit die Streuung auf solche Ursachen zurückzuführen ist. Es ist aber auch denkbar, daß der Streubereich einfach durch die Annahme der Einparametrigkeit bedingt ist.

Die Streuung ist bei kleinen I_1-Werten gering und wächst mit I_1 an. Das bedeutet, daß die Rechnungen, die auf Grund dieser Unterlagen ausgeführt werden, für geringen Druckanstieg oder Druckabfall ziemlich zuverlässig sind, bei großen Druckanstiegen nimmt die Genauigkeit ab. Dies ist rechnerisch dadurch bedingt, daß sich Fehler in α bei steigendem I_1 in wachsendem Maße auswirken, und physikalisch dadurch, daß mit Annäherung an die turbulente Ablösestelle die Voraussetzung für die Gültigkeit der einparametrigen Zusammenhänge weniger gut erfüllt ist, wie schon in Abschnitt **2** hervorgehoben wurde.

7. Berücksichtigung der Wandbindung. Bei den vorhergehenden Untersuchungen hatten wir die auf Grund der *Navier-Stokes*schen Bewegungsgleichungen geltenden Wandbindungen (3,1), fallen gelassen und auch Gründe dafür angegeben. Wenn wir nun wenigstens die erstgenannte

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{7,1}$$

doch berücksichtigen wollen, gleichzeitig aber auch an unseren übrigen Annahmen (Einparametrigkeit der Geschwindigkeitsprofile, eindeutige Abhängigkeit der Verteilung der statistischen Schwankungen von den Geschwindigkeitsprofilen) festhalten wollen, so bekommt man einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsprofil und dem in geeigneter Weise dimensionslos gemachten Druckgradienten $\partial p/\partial x$. Obwohl sich eine solche gegenseitige Zuordnung für die Berechnung turbulenter Grenzschichten nicht als sehr erfolgreich gezeigt hat, ist eine diesbezügliche Untersuchung im Hinblick auf eine Nachprüfung der hier zugrunde liegenden Überlegungen recht aufschlußreich.

Nach Einführung der Ansätze (3,5) und (3,6) in (7,1) ergibt sich

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \delta = \alpha (A - A_0). \tag{7,2}$$

Mit Hilfe der Beziehung[1]

$$\frac{\delta_1 U_1}{\delta v^*} = \frac{1 + \frac{1}{2} A}{\varkappa} \tag{7,3}$$

wird hieraus die Größe δ eliminiert, und man erhält

$$\lambda = \frac{1}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \delta_1 \frac{U_1}{v^*} = \alpha (A - A_0) \frac{1 + \frac{1}{2} A}{\varkappa}. \tag{7,4}$$

Bei der Größe λ handelt es sich um einen Parameter, der in ähnlicher Weise bereits von *A. Buri*[2] verwandt wurde. Unter Berücksichtigung der Wandbindung (7,1) als zusätzliche Bedingung läßt sich der „Buri-Parameter" λ also in Abhängigkeit von A und somit der Zusammenhang mit dem Formparameter I_1 nach (4,14) angeben. In Abb. 6 ist dieser Zusammenhang für Werte $\alpha = 2{,}57$ und $\alpha = 4{,}53$ dargestellt. Gleichzeitig sind die aus Meßergebnissen mehrerer Versuchsreihen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[3] errechneten Werte I_1 und λ eingezeichnet.

Wenn die vorgegebene Druckverteilung derart ist, daß der Buri-Parameter λ über eine längere Strecke in Strömungsrichtung konstant bleibt, so sollte man erwarten, daß sich das Grenzschichtprofil etwa so einstellt, wie es die Theorie unter Berücksichtigung der Wandbindung (7,1) voraussagt. Tritt dann eine plötzliche Änderung von λ ein, so wird das Geschwindigkeitsprofil diese Änderung nicht sofort mitmachen; die Änderung des Geschwindigkeitsprofiles hinkt nach. Hat man nun Druckverteilungen, bei denen λ in Strömungsrichtung stetig ansteigt, wie es bei den beiden, in Abb. 6 durch offene Kreise und gerade Kreuze gekennzeichneten Meßreihen der Fall ist, so sollte man demnach für I_1 Werte erwarten, die unterhalb der theoretischen I_1, λ-Kurve

[1] Gl. (6,15) der in Fußnote 1 von S. 195 zitierten Arbeit.
[2] Fußnote 2, S. 197.
[3] *H. Ludwieg* u. *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288 sowie unveröffentlichte Versuchsreihen.

liegen. Die beiden erwähnten Meßreihen liegen in Abb. 6 zwischen den beiden rechnerischen Kurven, folgen aber qualitativ ihrem Verlauf. Hiernach erscheint die Kurve *1*, deren Annahmen schon im Abschnitt **3** als die Wirklichkeit besser treffend erkannt wurden, die richtigere von beiden zu sein.

Diese Gedanken werden noch durch die durch schräge Kreuze und Dreiecke dargestellten Versuchsreihen erhärtet, bei denen λ in Strömungsrichtung zunächst ansteigt und dann wieder abfällt. Solange λ anwächst, liegen die Auswertungspunkte wieder unterhalb der Kurve *1*. Wenn dann λ aber wieder abnimmt, steigt I_1 zunächst weiter und überschneidet die Kurve *1*. Eine Ausnahme bildet die durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnete Reihe mit nur schwachem Druckanstieg. Hierbei bleibt I_1 auch nach Überschreiten des Größtwertes von λ etwas unterhalb der Kurve *1*.

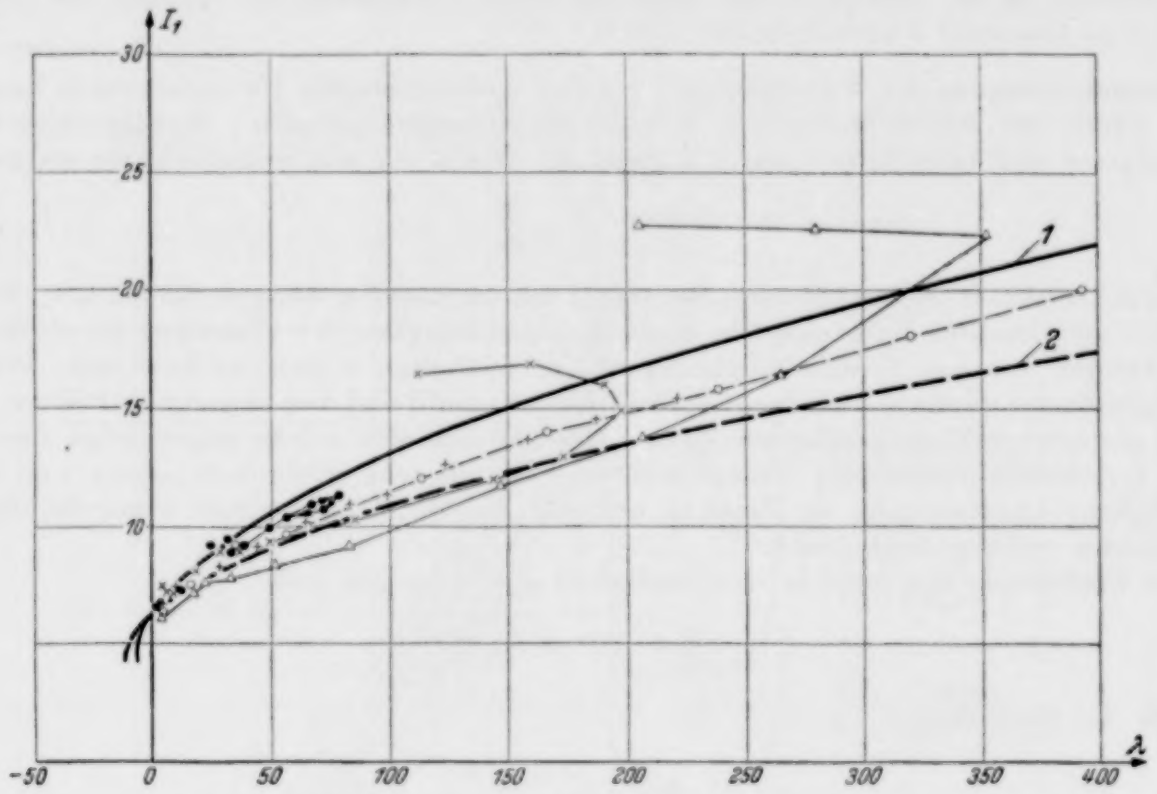

Abb. 6. Zusammenhang zwischen Formparameter I_1 und Buri-Parameter λ
Kurve *1*: $\alpha = 2{,}57$ } $\varkappa = 0{,}4$;
Kurve *2*: $\alpha = 4{,}53$ } $A_0 = 0{,}9$.
Versuchspunkte nach *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*.

Die Deutung der Versuchsbeobachtungen ist mit den Überlegungen der vorhergehenden Abschnitte verträglich, so daß diese Untersuchung als ein Beitrag zur Erhärtung der angegebenen Zusammenhänge gewertet werden kann. Darüber hinaus gibt aber Abb. 6 noch die Möglichkeit, die Brauchbarkeit eines vereinfachten Berechnungsverfahrens zu beurteilen, bei dem der Formparameter als eindeutige Funktion von λ aufzufassen wäre. Ein solches Verfahren entspricht dem von *A. Buri* vorgeschlagenen und bietet den Vorteil, daß für die Berechnung der Grenzschicht nur eine gewöhnliche Differentialgleichung statt deren zwei zu integrieren ist. Nach Abb. 6 scheint ein solches Verfahren durchaus brauchbar zu sein, wenn es sich um mäßige Druckanstiege handelt. Bei größeren λ-Werten mit wechselndem Verlauf versagt allerdings ein solches Verfahren.

8. Zusammenfassung. Zweck der Arbeit ist es, den Zusammenhang zwischen dem bei der Berechnung turbulenter Grenzschichten mit Hilfe des Impuls- und Energiesatzes benötigten Dissipationsintegral und dem Formparameter des Grenzschichtprofiles zu ermitteln. Als Grundlage wird die Hypothese benutzt, daß sich das Geschwindigkeitsprofil (mit Ausnahme der von der Zähigkeit und Wandrauhigkeit beeinflußten, dünnen Schicht nahe der Wand) als einparametrige Kurvenschar darstellen läßt, und daß zu jedem Geschwindigkeitsprofil auch ganz bestimmte Verteilungen der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten gehören. Die Anwendbarkeit dieser Annahme setzt voraus, daß die *Reynolds*zahl hinreichend groß und der Grenzschichtzuwachs $d\delta/dx$ von zweiter Ordnung klein gegen 1 ist.

Für die Schubspannungsverteilung wird dann ein Näherungsansatz eingeführt, mit dessen Hilfe unter Verwendung einer schon früher benutzten Formel für das Geschwindigkeitsprofil die Berechnung des Dissipationsintegrals bis auf eine empirische Konstante möglich ist. Die Größe dieser Konstanten wurde aus einer Anzahl gemessener turbulenter Grenzschichten berechnet. Der Fortschritt gegenüber einer früheren Auswertung ist dabei, daß jetzt Quadraturen an die Stelle der früher notwendigen Differentiationen treten.

Eine Untersuchung über den Einfluß der Wandbindung $\partial\tau/\partial y = \partial p/\partial x$, deren Berücksichtigung theoretisch in ähnlicher Weise wie bei dem von *A. Buri* vorgeschlagenen Berechnungsverfahren eine Beziehung zwischen dem Druckgradienten dp/dx gebildeten Parameter liefert, ergänzt die Untersuchungen.

(Eingegangen am 20. Dezember 1951.)

Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

Anschrift des Verfassers: *J. Rotta*, Göttingen, Böttingerstr. 6/8.

Zur Berechnung des Einflußfeldes der quadratischen Platte.

Von **E. R. Berger.**

In seiner Arbeit „Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten“[1] berechnet *Pucher* die Einflußfelder der allseitig eingespannten quadratischen Platte nach der Singularitätenmethode, mit Erfüllung der Randbedingungen an einzelnen Punkten. Unter anderem rechnet er (S. 87) das Einflußfeld des Drillungsmomentes in der Mitte durch den Ansatz

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\sin\varphi + \sum a_n \varrho^{2n} \sin 2n\varphi + \sum b_n \varrho^{2n+2} \sin 2n\varphi\right). \tag{1}$$

Der Ansatz liefert mit sechs Freiwerten zufriedenstellende Ergebnisse.

Als Nächstes berechnet *Pucher* das Stützmomenten-Einflußfeld in der Seitenmitte (S. 88) und macht dafür den Ansatz

$$w = \frac{1}{\pi}\left(-\cos^2\varphi + \sum_{n=1}^{n} c_n \varrho^{n+1} \cos\varphi \cos n\varphi\right) \tag{2}$$

Er schreibt dazu: „Die guten Erfahrungen, die mit der beim Drillungsmomenten-Einflußfeld angewendeten Methode gemacht wurden, ließen erwarten, daß man auch hier auf ähnliche Weise zum Ziele kommen würde . . . Das Ergebnis war aber unbrauchbar, obwohl die Summe über elf Funktionen, also verhältnismäßig viel Glieder, erstreckt wurde. Die Nachprüfung zeigte, daß . . . zwischen den Punkten, in denen die Randbedingungen streng erfüllt sind, sowohl die Funktionswerte als auch die Neigung der Randtangenten viel größere Abweichungen vom Sollbetrag zeigten, als zugelassen werden konnte. Die Ursache ist in der mit steigendem n größer werdenden Anzahl der Nullinien der einzelnen Funktionen zu suchen, so daß auch die Hinzunahme weiterer Glieder das Ergebnis nicht verbessern konnte.“

Die hier beschriebene Erscheinung ist ein typisches Kennzeichen dafür, daß die im Ansatz verwendeten Funktionen kein „vollständiges“ Funktionensystem bilden. Sie würde in genau derselben Form auftreten, wenn man z. B. eine periodische Funktion in einer ungeraden Anzahl (n) von äquidistanten Punkten durch ein trigonometrisches Polynom exakt darstellen will, dabei aber im Ansatz nur die Harmonischen gerader Ordnung verwendet. Anstelle der im Ansatz fehlenden Funktion $\cos x$ z. B. tritt jetzt mit derselben Amplitude die Funktion $\cos(n-1)x$ auf, da sie in den vorgegebenen Punkten mit $\cos x$ übereinstimmt. Zwischen je zwei solchen Punkten durchläuft sie aber fast eine ganze Periode, daher kann von einer Annäherung in den Zwischenpunkten keine Rede mehr sein.

Etwas Ähnliches ist nun offenbar auch beim Ansatz (2) geschehen. Zunächst ist aus dem Text nicht ersichtlich, ob unter n in (2) alle natürlichen Zahlen oder nur die ungeraden Zahlen verstanden sein sollen. Für gerade n erfüllen aber die einzelnen Glieder zwar die Randbedingung

$$w_i = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm\pi/2\,, \tag{3}$$

[1] Ing.-Archiv, 12 (1941), S. 76.

sie erfüllen aber nicht die Randbedingung

$$\frac{\partial w_i}{\partial n} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \pm \pi/2 . \tag{4}$$

Wir müssen also die geraden n ausschließen, und das hat *Pucher* wahrscheinlich auch getan, da er vorher schreibt: „Es liegt nahe, auch das allgemeine Integral so anzusetzen, daß es, unabhängig von den Freiwerten, am Rande gleichzeitig mit der Ableitung verschwindet." Nun sind aber auch die geraden Zahlen Eigenwerte des Problems, und da die zugehörigen Eigenfunktionen im Ansatz fehlen, ist das System eben unvollständig.

Die Eigenlösungen für die geraden Zahlen lauten

$$w_n = \varrho^{n+1}\left(\cos\varphi \cos n\varphi + \frac{1}{n}\sin\varphi \sin n\varphi\right) \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots) . \tag{5}$$

Wir haben daher für die Lösung anzusetzen

$$w = \frac{1}{\pi}\Bigg[-\cos^2\varphi + \sum_{n=1,3,5\ldots} c_{n+1}\varrho^{n+1}\cos\varphi\cos n\varphi + \sum_{n=2,4,6\ldots} c_{n+1}\varrho^{n+1}\left(\cos\varphi\cos n\varphi + \frac{1}{n}\sin\varphi\sin n\varphi\right)\Bigg] . \tag{6}$$

Die Rechnung wurde versuchsweise mit diesem Ansatz durchgeführt und die Randbedingungen in den Punkten A, B und C (vgl. Abb. 1) streng erfüllt. A und C geben je zwei Randbedingungen, B drei; wir benötigen also 7 Freiwerte. Das numerische Ergebnis wird weiter unten mitgeteilt.

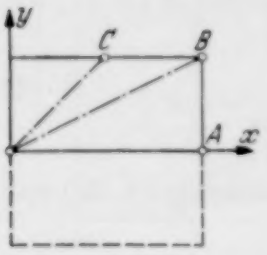

Abb. 1.

Im Grunde genommen hat *Pucher* selbst schon die Funktionen (5) verwendet, nur in einer anderen Gestalt. Er schreibt nämlich weiter: „Es mußten andere Funktionen herangezogen werden, die längs $x = 0$ dem eingespannten Rande entsprechen. Auf der Suche nach solchen Funktionen wurden Polynome gefunden . . ." Diese biharmonischen Polynome (bzw. jene darunter, die in y gerade sind) sind aber genau identisch mit den Funktionen des Ansatzes (6). Das läßt sich im Einzelnen durch algebraische Umformung verifizieren, geht aber auch aus folgender Überlegung hervor:

Die biharmonischen Polynome sind homogen in x und y, können also auch in der Form geschrieben werden

$$P_{n+1} = \varrho^{n+1}\sum^{n+1} a_k \cos^k\varphi \sin^{(n+1-k)}\varphi .$$

Das läßt sich umformen in

$$P_{n+1} = \varrho^{n+1}\sum^{n+1} b_k \cos k\varphi$$

(bzw. für die in y ungeraden in $\Sigma \bar{b}_k \sin k\varphi$). Da die biharmonischen Polynome Lösungen sind von $\Delta\Delta P = 0$, scheiden alle Glieder aus außer den beiden

$$P_{n+1} = \varrho^{n+1}\left(c_n \cos(n+1)\varphi + \bar{c}_n \cos(n-1)\varphi\right) = \varrho^{n+1}\left(d_n \cos\varphi\cos n\varphi + \bar{d}_n \sin\varphi\sin n\varphi\right) .$$

Die Randbedingungen (3) und (4) bilden zwei homogene Bestimmungsgleichungen für d und $\bar{d}$, die aber verträglich sind (weil eben eine Eigenlösung vorliegt), sie bestimmen das Verhältnis $d:\bar{d}$, und damit ist P bis auf einen konstanten Faktor festgelegt. Da nun die Funktionen des Ansatzes (6) durch genau dieselben Bedingungen definiert sind, können sie sich von den P nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Setzt man etwa $x = 1$, $y = 0$ bzw. $\varrho = 1$, $\varphi = 0$ in die beiden Ausdrücke ein, erhält man jedesmal 1, womit die Identität bewiesen ist.

Zur Bezeichnung der biharmonischen Polynome wäre noch zu bemerken: es wäre vielleicht zweckmäßig, die Zeiger nicht nach dem Grad der einzelnen Variablen, sondern nach dem Grad des ganzen Ausdruckes zu wählen, und die in y geraden bzw. ungeraden Funktionen durch verschiedene Buchstaben zu unterscheiden, also etwa:

$$\left.\begin{aligned}
P_0 &= 1\,,\\
P_1 &= x \;\; = \varrho\cos\varphi\,,\\
P_2 &= x^2 \;\; = \varrho^2\cos^2\varphi\,,\\
Q_2 &= x\,y \;\; = \varrho^2\cos\varphi\sin\varphi\,,\\
P_3 &= x^3 \;\; = \varrho^3\left(\cos\varphi\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\sin 2\varphi\right),\\
Q_3 &= x^2\,y = \varrho^3\cdot\frac{1}{2}\cos\varphi\sin 2\varphi\,,\\
P_4 &= x^4 \;\; - 3\,x^2y^2 = \varrho^4\cos\varphi\cos 3\varphi\,,\\
Q_4 &= x^3\,y = \varrho^4\cdot\frac{3}{8}\left(\cos\varphi\sin 3\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos 3\varphi\right).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Allgemein ist

$$\left.\begin{aligned}
P_{2n} &= \varrho^{2n}\cos\varphi\cos(2n-1)\varphi\,,\\
Q_{2n} &= \varrho^{2n}\frac{2n-1}{2n\cdot(2n-2)}\left[\cos\varphi\sin(2n-1)\varphi - \frac{1}{2n-1}\sin\varphi\cos(2n-1)\varphi\right],\\
P_{2n+1} &= \varrho^{2n+1}\left[\cos\varphi\cos 2n\varphi + \frac{1}{2n}\sin\varphi\sin 2n\varphi\right],\\
Q_{2n+1} &= \varrho^{2n+1}\frac{1}{2n}\cos\varphi\sin 2n\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(ausgenommen für P_0 P_1 und Q_2).

Für die Durchrechnung der quadratischen Platte wählt *Pucher* die Länge der halben Quadratseite mit 0,4. Er schreibt dazu (S. 91): „Infolgedessen bleiben diejenigen Bereiche, in denen bei den Polynomen höheren Grades die Tangente $\partial P_i/\partial x$ bzw. $\partial P_i/\partial y$ sehr steil ansteigt, außerhalb des Bereiches. Das ist zweckmäßig, weil auch die aus der Singularität folgenden Randneigungen innerhalb kleiner Grenzen bleiben und somit die Angleichung der Randwerte des Regularteiles an die des Singularteiles erleichtert wird." Diese Wahl des Maßstabes kann nun vielleicht die praktische Durchführung der Rechnung etwas erleichtern, hat aber auf das Ergebnis prinzipiell keinerlei Einfluß. (Das wird grundlegend anders, wenn man Integrale verschiedener Dimension addiert, wie es *Pucher* im nächstfolgenden Abschnitt tut [S. 93, Formel (27)]. Ändert man dort den Maßstab, so ändert man das Gewicht der einzelnen Integrale und damit auch das Ergebnis). Da die einzelnen Summanden homogen sind, bewirkt die Maßstabänderung lediglich, daß die Koeffizienten c_n sich durch $(0{,}4)^n$ dividieren. Man kann also am Schluß der Rechnung ohne Mühe wieder auf das Quadrat mit der halben Seitenlänge 1 zurückgehen, indem man die erhaltenen c_n mit $(0{,}4)^n$ multipliziert. Mit den so reduzierten Koeffizienten von *Pucher* wurde das Ergebnis der oben angeführten Rechnung verglichen:

	Pucher	7-gliedr. Ansatz
c_2	+ 1,159806	+ 1,1658293
c_3	— 0,489015	— 0,5147134
c_4	— 0,277883	— 0,1346960
c_5	+ 0,228991	+ 0,1278343
c_6	+ 0,019572	— 0,0154916
c_7	— 0,006522	— 0,0082812
c_8	+ 0,001844	+ 0,0022277
c_9	+ 0,0003407	—
c_{10}	— 0,0002643	—
c_{11}	+ 0,00002994	—
c_{12}	+ 0,000002798	—

Wie man sieht, stimmen die ersten beiden Koeffizienten ungefähr überein, im weiteren Verlauf wird der Unterschied immer größer.

Für die größten Abweichungen in den Zwischenpunkten ergibt sich (vgl. S. 92):

$|\Delta w| \leq 0{,}036/\pi$ bzw. $0{,}036/\pi$

für die Abweichung der Steigung (reduziert auf Seitenlänge 1):

$$\left|\Delta\frac{\partial w}{\partial n}\right| \leq 0{,}29/\pi \quad \text{bzw.} \quad 0{,}44/\pi$$

schließlich für das Stützmoment bei Gleichlast:

$$-0{,}0519\,pl^2 \quad \text{bzw.} \quad -0{,}0484\,pl^2.$$

Die Genauigkeit des 7-gliedrigen Ansatzes wäre also noch unzureichend.

Zusammenfassend kann man also feststellen: Der von *Pucher* verworfene Ansatz ist nicht prinzipiell ungeeignet, sondern nur unvollständig. Die von *Pucher* verwendeten biharmonischen Polynome sind mit dem vervollständigten ersten Ansatz identisch. Die Wahl des Maßstabes ist für das Ergebnis ohne Einfluß.

(Eingegangen am 25. Januar 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *E. R. Berger*, Wien, Technische Hochschule.

Zuschrift

zu der Arbeit von *E. R. Berger*, „Zur Berechnung des Einflußfeldes der quadratischen Platte".

Von **A. Pucher.**

Die Aufklärung, die Herr *Berger* nunmehr über die Ursache des Versagens des von mir seinerzeit verwendeten Ansatzes

$$w = \frac{1}{\pi}\left(-\cos^2\varphi + \sum_{n=1,3,5} c_n\, \varrho^{n+1} \cos\varphi \cos n\varphi\right) \tag{1}$$

gebracht hat, ist sehr zu begrüßen, da sie unsere Kenntnisse über das vollständige Integral von $\Delta\Delta w = 0$ vertieft hat.

Die Identitäten der biharmonischen Polynome mit den trigonometrischen Reihen

$$P_{n+1} = \varrho^{n+1} \sum^{n+1} a_k \cos^k\varphi \sin^{(n+1-k)}\varphi = \varrho^{n+1} \sum^{n+1} b_k \cos\varphi_k$$

wurden schon von Herrn *K. Zweiling* in den Jahren 1942—43 im Rahmen einer umfassenden Arbeit über die biharmonischen Polynome gefunden und mir mitgeteilt. Leider ist keine Veröffentlichung dieser wertvollen Ergebnisse erfolgt.

Ich habe mich mit dem Versagen des Ansatzes (1) nicht weiter beschäftigt, da ich zunächst mit Hilfe der biharmonischen Polynome, die in kartesischen Koordinaten ausgedrückt, für die Berechnung rechteckiger Platten naturgemäß viel bequemer sind, als in Polarkoordinaten dargestellte Funktionen, die gesuchten Einflußfelder mit ausreichender Genauigkeit berechnen konnte. Im Verlaufe meiner weiteren Untersuchungen fand ich jedoch die „modifizierten Singularitäten", die erstmalig 1943[1], sowie 1950[2] und 1951[3] mitgeteilt wurden, und die die Berechnung der Einflußfelder noch viel einfacher gestalteten. Mit Hilfe dieser modifizierten Singularitäten ist es möglich, die verschiedenen Einflußfelder der Rechteckplatten mit so gut konvergierenden Reihen zu berechnen, daß in den meisten Fällen nur ein Reihenglied zu berücksichtigen ist.

Demnach sind die Ausführungen von Herrn *Berger* vorwiegend für die theoretische Erkenntnis wertvoll, für die numerische Ermittlung der Einflußfelder der Rechteckplatten jedoch weniger von Bedeutung.

(Eingegangen am 3. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *A. Pucher*, Graz, Burgring 16.

---

[1] *A. Pucher*, Ing.-Arch. (1943), S. 246.

[2] *A. Pucher*, Die Einflußfelder des Plattenstreifens mit zwei eingespannten Rändern; Beiträge zur angewandten Mechanik, *Federhofer-Girkmann*-Festschrift. Wien 1950.

[3] *A. Pucher*, Einflußfelder elastischer Platten, Wien 1951.

Magnetische Werkstoffe. Von Dr. techn. Ing. **Franz Pawlek,** o. Professor an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg. (Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen. Herausgegeben von W. Köster. Band 11.) Mit 270 Abbildungen. VII, 303 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 42.—

Inhaltsübersicht: **Einleitung. Dauermagnete.** Allgemeines: Charakterisierung der Dauermagnete. Theorie der Koerzitivkraft. Theorie der Remanenz. — Dauermagnet-Werkstoffe: Geschichtlicher Überblick. Durch Gefügeumwandlung gehärtete Werkstoffe. Durch Ausscheidung gehärtete Werkstoffe. Legierungen, deren Dauermagneteigenschaften mit der Ausbildung einer Überstruktur verknüpft sind. Pulvermagnete. Oxydmagnete. **Magnetisch weiche Werkstoffe.** Allgemeines: Charakterisierung der magnetisch weichen Werkstoffe. Theorie der Remanenz. Theorie der Koerzitivkraft und Anfangspermeabilität. — Magnetisch weiche Werkstoffe: Geschichtlicher Überblick. Reines Eisen. Technische Eisensorten. Eisenlegierungen. Eisen-Nickel-Legierungen. — **Magnetische Werkstoffe für Pupinspulen und Hochfrequenzkerne.** Allgemeines: Charakterisierung der Werkstoffe für Pupinspulen und Hochfrequenzkerne. — Massekerne: Eigenschaften der Massekerne. Herstellung und Eigenschaften der Massekerne. — Isoperme: Ausscheidungsisoperm. Textur-Isoperm. Plattierungs-Isoperm. — Nichtmetallische magnetische Werkstoffe: Theorie des Ferrimagnetismus. Eigenschaften der Ferrite. Verwendung. — **Werkstoffe mit großer Magnetostriktion. — Werkstoffe mit besonderen physikalischen Eigenschaften auf Grund verborgener magnetischer Vorgänge.** Allgemeines: Theorie der Werkstoffe mit geringem Temperaturkoeffizienten der Ausdehnung. Theorie der Werkstoffe mit geringem Temperaturkoeffizienten des E-Moduls. — Werkstoffe mit kleinem Ausdehnungskoeffizienten: Invarlegierungen. Glas-Einschmelz-Legierungen. — Werkstoffe mit kleinen Temperaturkoeffizienten des E-Moduls. — **Magnetische Werkstoffe mit stark temperaturabhängiger Sättigungsmagnetisierung. — Unmagnetische Werkstoffe:** Nichteisenmetalle. Unmagnetisches Gußeisen. Unmagnetischer Stahl. — **Anhang. — Namen- und Sachverzeichnis.**

Die Edelstähle. Von Professor Dr.-Ing. **Franz Rapatz,** Stahlwerk Gebr. Böhler & Co. A.-G. Kapfenberg (Steiermark). Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Unter Mitwirkung von Dr.-Ing. **Helmut Krainer,** und Dipl.-Ing. **Josef Frehser,** Stahlwerk Gebr. Böhler & Co. A.-G., Kapfenberg (Steiermark). Mit 338 Abbildungen und 121 Zahlentafeln. V, 730 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 49.50

Aus den Besprechungen: ... Das Buch ist einfach und klar geschrieben, und alle Spezialausdrücke werden auf das genaueste erklärt. Wenn der Leser einigermaßen gute Kenntnisse in Physik und Chemie besitzt, so vermag er ohne Schwierigkeit der Darstellung zu folgen. Wenn auch ein unerhört großes Wissen auf relativ engem Raum zusammengedrängt ist, so ist das Buch doch leicht lesbar. Es ist zweifellos ein besonders wertvolles Nachschlagewerk, in dem man praktisch genommen alles theoretisch und praktisch Wissenswerte auf diesem Gebiet wenigstens erwähnt findet. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis macht es dem Leser möglich, ohne besondere Mühe die Angaben des Buches zu ergänzen. Es reicht bis ungefähr zum Jahreswechsel 1949/50 und umfaßt nicht nur Deutschland, sondern auch USA und in gewisser Hinsicht Großbritannien ... „Teknisk Tidskrift".

Die Zerspanbarkeit der metallischen und nichtmetallischen Werkstoffe. Von Dr.-Ing. habil. **Karl Krekeler,** Professor an der Technischen Hochschule Aachen. Mit 148 Abbildungen. XII, 358 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 34.50

Aus den Besprechungen: ... Krekelers neue, wirklich umfassende Arbeit stellt — ohne jedoch praktische Erfahrungstatsachen zu übergehen — verständlicherweise mehrheitlich auf wissenschaftliche Untersuchungsergebnisse ab und arbeitet diese, die Erfahrungen anderer Zerspanungsspezialisten und -forscher mitverwertend, in einer für die Praxis direkt brauchbaren Form aus. Weit mehr Hand- als Lehrbuch ist dasselbe dem Zerspanungsfachmann ohne jegliche Beschränkung zu empfehlen ... „Technische Rundschau".

Hydraulische Schmiedepressen und Kraftwasseranlagen. Konstruktion und Berechnung. Von **Ernst Müller,** Duisburg. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 167 Abbildungen. VII, 208 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 28.50

Die hydraulischen Schmiedepressen stehen neben Walzwerken und Hämmern unter den Maschinen zur spanlosen Verformung der Metalle an erster Stelle. Sie haben im Laufe der Entwicklung, hauptsächlich hervorgerufen durch den Bedarf an nahtlosen, geschmiedeten Hochdruckkesseln und immer größer werdenden Schmiedestücken für den Schiffs- und Maschinenbau sowie für die chemische Industrie, Abmessungen erhalten, die sie in die Reihe der größten Bauwerke der Maschinenindustrie stellen. Die erste Auflage dieses Buches erschien kurz vor Ausbruch des zweiten Weltkrieges. In der Zwischenzeit ist die Entwicklung der Konstruktionen weitergegangen, die sich im wesentlichen auf die Vervollkommnung der Antriebe und Hilfseinrichtungen für die Pressen beschränkte. Dampf und Luft als Betriebsmittel für hydraulische Schmiedepressen wurden immer mehr zugunsten des rein- und elektro-hydraulischen Betriebes aufgegeben. Während in England für schwere Pressen vornehmlich der direkte Pumpenantrieb weiterentwickelt wurde, bevorzugte man in den USA und Deutschland den reinhydraulischen Antrieb in Verbindung mit Druckluftakkumulatoren. Auf den letzten Seiten des Buches werden aus allen Ländern der Schwerindustrie die größten Schmiedepreßwerke aufgeführt, wobei außer dem Druckvermögen der Pressen auch die Betriebsart und das Baujahr angegeben werden. Große Fortschritte sind auf dem Gebiete der Mechanisierung des Blocktransportes durch weitgehende Anwendung von Schmiedemanipulatoren zu verzeichnen. Sie hat zu großer Produktionssteigerung und Einsparung von Blockwärmen und Arbeitskräften geführt. In der vorliegenden neuen Auflage sind die einzelnen Kapitel dem heutigen Stand der Technik angepaßt und entsprechend erweitert worden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Statische Berechnung von Kesselböden. Von Dr.-Ing. **Maria Eßlinger,** Saarbrücken. Mit 21 Abbildungen. VIII, 100 Seiten. 1952. DM 10.50

Aus den Besprechungen: ... Auf Grund der aufgestellten Gleichungen und Rechenschemata sind eine Reihe von Beispielen durchgerechnet, von denen drei solchen Böden entsprechen, die Siebel experimentell untersucht hat. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch ist — unter Berücksichtigung der möglichen und unvermeidlichen Meßfehler bei solchen Spannungsmessungen an Hohlkörpern — so überraschend gut, daß man den Rechnungsergebnissen und den Schlußfolgerungen, die Eßlinger daraus zieht, volles Vertrauen entgegenbringen kann. Das Rechenverfahren liefert daher ein wertvolles Hilfsmittel, um in schwierigen Fällen eine sichere Entscheidung über die erforderliche Wanddicke eines Bodens treffen zu können, und eine wertvolle Bestätigung für die bewährten, auf Grund der Versuche von Siebel u. a. aufgestellten Gleichungen der Werkstoff- und Bauvorschriften für Land- und Schiffsdampfkessel. „Energie".

SPRINGER-VERLAG / BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG

Berechnung mechanischer Schwingungen. Von Dipl.-Ing., Dr. techn. **Fritz Söchting,** tit. a. o. Professor an der Technischen Hochschule Wien. Mit 140 Textabbildungen. X, 325 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 32.70

Die ständig wachsenden Ansprüche an die Maschinenleistung und das Bestreben, durch immer knappere Abmessungen Gewicht, Raum und Werkstoff einzusparen, haben die Berechnung der an Maschinenteilen auftretenden Schwingungen und Resonanzfrequenzen zu einer wichtigen Aufgabe für den Techniker gemacht. Das vorliegende Buch wendet sich ebenso an den Studierenden, dem es den Weg zur selbständigen Weiterarbeit weisen will, wie an den in der Praxis stehenden Ingenieur.

Mechanische Technologie. Von Dipl.-Ing. **A. Kopecky,** Steyr, und Dipl.-Ing. Dr. techn. **R. Schamschula,** Wien. Mit 424 Textabbildungen. X, 363 Seiten. 1951. DM 18.—; Ganzleinen DM 19.80

Aus den Besprechungen: ... Auf verhältnismäßig kleinem Raum kann auf einem weitgesteckten Gebiet wie dem der mechanischen Technologie nur ein Wissen vermittelt werden, wenn in der Tiefe der Darstellung Beschränkung geübt wird. Dies ist den Verfassern gelungen. Je mehr sich die industrielle Fertigung bemüht, die Endform in voraufgehende Arbeitsgänge vorzuverlegen, wird sich der Betriebsmann und Konstrukteur mit den Eigenarten und Möglichkeiten dieser Arbeitsverfahren vertraut machen müssen. Er wird sich dabei nicht nur auf die ‚klassischen' Werkstoffe des Maschinenbaues beschränken können. Dies haben die Verfasser berücksichtigt. „Industrie-Anzeiger".

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Diesem Heft liegen 3 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. K 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040